ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ
В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

Конспект лекций для студентов 3-го курса физического факультета

СПбГУ, 2001

Данный конспект посвящен основам теории обобщенных функций и их приложениям и охватывает часть курса “МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ” для студентов экспериментальных специальностей 3-го курса физического факультета СПбГУ. Конспект составлен на основе лекций, прочитанных на протяжении ряда лет А.Г.Аленицыным и В.Э.Грикуровым.

Обновления и исправления можно найти на сайте
http://mph.phys.spbu.ru/~grikurov

Оглавление

ГЛАВА 1

ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ: ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Необходимость во введении понятий, называемых обобщенными функциями, возникла при попытке дать строгое описание сосредоточенных (в точке, на поверхности, т.д.) объектов, которые являются удобными физическими идеализациями. С другой стороны, обобщенные функции позволяют также с единой точки зрения рассматривать производные гладких и разрывных функций, преобразование Фурье убывающих и растущих функций и др., т.е. в них имеется и чисто математическая потребность. Как мы увидим ниже, по своим свойствам обобщенные функции мало похожи на "обычные" функции, поэтому за ними закрепился также термин "распределения" (distributions).

1.1 ОСНОВНЫЕ (ПРОБНЫЕ) ФУНКЦИИ; ФУНКЦИОНАЛЫ НАД НИМИ

Обобщенная функция будет определена ниже как функционал, т.е. правило, с определенными свойствами, сопоставления "пробная функция" $\mapsto$ число. Начнем с описания класса пробных функций.

1.1.1 Пространство основных функций

Определение 1.1. Функции $\phi(x)$, которые непрерывно дифференцируемы любое количество раз, $\phi \in C^\infty(-\infty,\infty)$, и финитны, т.е. $\phi(x) \equiv 0$ вне некоторого интервала $[a,b]$, будем называть основными (пробными). Множество таких функций $\mathcal{K}$ назовем основным пространством. Совокупность всех точек, в которых основная функция $\phi(x) \neq 0$, называется ее носителем $\operatorname{supp}\phi(x)$.

Такие функции заведомо существуют: например,

$$\phi(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geqslant a \\ \exp -\frac{a^2}{a^2-x^2}, & |x| < a \end{cases} \tag{1.1}$$

(убедитесь в ее непрерывной дифференцируемости).

Очевидны следующие утверждения: *(i)* $\mathcal{K}$ является линейным пространством; *(ii)* $\phi \in \mathcal{K} \Rightarrow \phi^{(l)} \in \mathcal{K}\ \forall\ l\,$; *(iii)* $\phi \in \mathcal{K} \Rightarrow h(x)\phi \in \mathcal{K}\ \forall\ h(x) \in C^\infty$ ($h(x)$ не обязательно финитная).

Определение 1.2. Последовательность функций $\phi_n(x)$ будет называться сходящейся в $\mathcal{K}$, $\phi_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{K}} \phi(x)$, если *(1)* существует конечный интервал, содержащий носители всех функций $\phi_n(x)$, и *(2)* на этом интервале $\phi_n^{(l)}(x) \rightrightarrows \phi^{(l)}(x)\ \forall\ l$. При этом предельная функция с необходимостью принадлежит $\mathcal{K}$.

Пример 1.1. *Последовательность функций* $\phi_n(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geqslant a \\ \frac{1}{n}\exp -\frac{a^2}{a^2-x^2}, & |x| < a \end{cases}$ *сходится к нулю, в то время как последовательность* $\phi_n(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geqslant n \\ \frac{1}{n}\exp -\frac{n^2}{n^2-x^2}, & |x| < n \end{cases}$ *не имеет предела в смысле* $\mathcal{K}$.

1.1.2 Обобщенные функции над пространством $\mathcal{K}$

Определение 1.3. Обобщенными функциями назовем линейные непрерывные * (как правило - вещественно-значные) функционалы, заданные на пространстве $\mathcal{K}$. Число, сопоставляемое основной функции $\phi(x)$ функционалом f, обозначаем как (f, ϕ) (и называем действием обобщенной функции f на пробную $\phi(x)$).

Определение 1.4. Нулевой обобщенной функцией называем такой функционал, значения которого равны нулю на любой пробной функции. Две обобщенные функции равны (пишем $f_1 \overset{\mathcal{K}'}{=} f_2$), если значения соответствующих функционалов совпадают на всех пробных функциях (т.е. $(f_1, \phi) = (f_2, \phi)\ \forall\ \phi \in \mathcal{K}$).

Важный частный случай:

Определение 1.5. Пусть $g(x)$ - произвольная локально-суммируемая функция (т.е. такая, которую можно под знаком модуля проинтегрировать по любому конечному интервалу; эта функция может иметь разрывы первого рода (скачки), а также слабые степенные, порядка $\mathrm{O}\left((x - x_0)^\alpha\right)$, $\alpha < 1$, особенности). Регулярной обобщенной функцией назовем функционал, порождаемый функцией $g(x)$ по следующей формуле: $(g, \phi) = \int g(x)\phi(x)dx$ (здесь и в дальнейшем при отсутствии пределов интегрирования подразумевается интегрирование по всей вещественной оси).

Сходимость написанного интеграла обеспечивается на любом конечном интервале за счет предположений на функцию $g(x)$, а на бесконечности - за счет финитности пробных функций. Линейность и непрерывность выше определенного функционала легко проверяются.

Пример 1.2. *Классическая функция Хэвисайда (функция единичного скачка) определяется как* $\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$ *и порождает функционал* $(\theta, \phi) = \int\limits_0^\infty \phi(x)dx$.

Таким образом, пространство обобщенных функций (обозначаемое в дальнейшем через $\mathcal{K}'$) не пусто и по крайней мере содержит регулярные обобщенные функции, которые, на первый взгляд, естественным образом отождествляются с обычными (локально-суммируемыми) функциями. Однако это отождествление не полное: действительно, две функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$, отличающиеся своими значениями хотя бы в одной точке, в обычном смысле считаются различными. Однако они порождают одну и ту же обобщенную функцию, поскольку изменение подинтегрального выражения в одной точке не изменяет величины интеграла (в примере 1.2 не важно, какое значение приписывается классической $\theta(x)$ в

---

*Напомним, что: линейность (в вещественном случае) означает $(f, c_1\phi_1 + c_2\phi_2) = c_1(f, \phi_1) + c_2(f, \phi_2)$; под непрерывностью (над пространством $\mathcal{K}$) понимается $(f, \phi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ для любой последовательности $\phi_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{K}} 0$.

нуле). Обобщая, можно сказать, что регулярная обобщенная функция соответствует множеству локально-суммируемых функций, отличающихся на счетном множестве точек.

Из сказанного уже становится ясным принципиальное отличие понятия обобщенной функции от классического понимания функции: мы не можем говорить о значениях обобщенной функции в точках. Однако мы будем часто пользоваться обозначением $f(x)$ для обобщенной функции, смысл которого прояснится ниже (будет также показано, что можно сравнивать обобщенные функции на интервалах).

Упражнение 1.1. *Докажите, что если регулярные $f_1, f_2 \in \mathcal{K}'$, порождаемые непрерывными функциями $f_1(x)$, $f_2(x)$, совпадают, то $f_1(x) \equiv f_2(x)$.*

Разумеется, пространство $\mathcal{K}'$ не исчерпывается регулярными обобщенными функциями. Важный пример — δ-функция Дирака.

Определение 1.6. δ-функцией называется функционал, определяемый равенством $(\delta, \phi) = \phi(0)$ (линейность и непрерывность которого очевидны).

Утверждение 1.1. *δ-функция <u>не</u> является регулярной обобщенной функцией.*

■ Предположим противное: $\exists\ g(x)$ такая, что $\forall\ \phi \in \mathcal{K}\ \phi(0) = (\delta, \phi) = \int g(x)\phi(x)dx$. Выбрав в качестве $\phi(x)$ функцию (1.1)для интервала $(-\varepsilon, \varepsilon)$ (обозначим ее $\phi_\varepsilon(x)$), получим:

$$e^{-1} = (\delta, \phi_\varepsilon) = \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - x^2}\right) g(x)dx\,.$$

Оценивая правую часть здесь видим, что она по модулю $\leqslant \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |g(x)|dx \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$, что противоречит значению левой части, которая вообще не зависит от ε. ■ *

Определение 1.7. Линейные непрерывные функционалы, <u>не</u> являющиеся регулярными обобщенными функциями, называются сингулярными обобщенными функциями.

1.2 ДЕЙСТВИЯ НАД ОБОБЩЕННЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Введем линейные операции над обобщенными функциями.

Определение 1.8. *1)* Сложение: $(f_1 + f_2, \phi) := (f_1, \phi) + (f_2, \phi)$; *2)* Умножение на число: $(\gamma f, \phi) := (f, \gamma\phi)$

Таким образом, $\mathcal{K}'$ превращается в линейное пространство. Кроме того, обобщенные функции можно умножать на гладкие классические функции:

Определение 1.9. $\forall\ h(x) \in C^\infty\ (hf, \phi) := (f, h\phi)$

(определение корректно, т.к. произведение $h(x)\phi(x)$ тоже является пробной функцией).

*Однако запись типа $\int \delta(x)\phi(x)dx$ иногда используется чисто формально; под таким интегралом понимают, в соответствии с определением, число $\phi(0)$.

Замечание 1.1. *Здесь мы воспользовались следующим наводящим соображением: заметим, что для* <u>*регулярных*</u> *обобщенных функций* <u>*имеет место*</u> *цепочка равенств*

$$(hf, \phi) = \int (h(x)f(x))\, \phi(x)dx = \int f(x)\, (h(x)\phi(x))\, dx = (f, h\phi).$$

Затем принимаем это равенство <u>*по определению*</u> *для* <u>*всех*</u> *обобщенных функций. Подобного рода наводящие соображения лежат в основе всех дальнейших определений операций над обобщенными функциями.*

Пример 1.3. $(h\delta, \phi) = (\delta, h\phi) = h(0)\phi(0)$, *т.е.* $h\delta \overset{\mathcal{K}'}{=} h(0)\delta$.
В частности: $x\delta \overset{\mathcal{K}'}{=} 0$; $\quad e^x\delta \overset{\mathcal{K}'}{=} \cos x\delta \overset{\mathcal{K}'}{=} \delta$.

Замечание 1.2. *Не удается разумным образом определить произведение обобщенной функции на разрывную и, тем более, произведение обобщенных функций. О возникающих трудностях дает представление следующий пример: ясно, что для любого n следует считать равными* θ^n *и* θ*; но для такого произведения не могут выполняться обычные правила дифференцирования.*

1.2.1 Дифференцирование обобщенных функций

Определение 1.10. Производной обобщенной функции f (коротко: обобщенной производной) назовем функционал f', действующий на пробную функцию ϕ по следующему правилу: $(f', \phi) := (f, -\phi')$.
(Восстановите наводящее соображение, приводящее к этому определению!).

Легко проверить корректность определения, т.е. что f' является линейным непрерывным функционалом. Таким образом:

Следствие 1.1. Любая обобщенная функция имеет любое количество производных, причем: $(f^{(m)}, \phi) = (f, (-1)^m \phi^{(m)})$

Замечание 1.3. *Заметьте, что при определении обобщенной производной функции не использовалось (в отличие от классических производных!) понятие сходимости в пространстве* $\mathcal{K}'$ *(которое, тем не менее, будет обсуждаться ниже).*

Пример 1.4. $(\delta', \phi) = (\delta, -\phi') = -\phi'(0)$

Как и положено дифференцированию, оно является линейной операцией (проверьте!). Кроме того, справедливо обычное правило дифференцирования $h(x)f$:

$$\begin{aligned}
((hf)', \phi) &= \\
&= (hf, -\phi') = (f, -h\phi') = (f, -(h\phi)') + (f, h'\phi) = (f', h\phi) + (f, h'\phi) = \\
&= (hf' + h'f, \phi),
\end{aligned}$$

т.е. $(hf)' = hf' + h'f$ *

*Здесь и в дальнейшем вместо $\overset{\mathcal{K}'}{=}$ пишем просто $=$, если это не может привести к недоразумениям.

Важный пример:

Утверждение 1.2. $\theta' = \delta$

$$\blacksquare\ (\theta', \phi) = (\theta, -\phi') = \int\limits_0^{\infty} (-\phi')dx = -\phi(\infty) + \phi(0) = \phi(0) = (\delta, \phi)\ \blacksquare$$

Обозначение 1.1. *Будем писать $g_+(x)$ для (классической) функции $g(x)$, "обрезанной" нулём слева: $g_+(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ g(x), & x > 0 \end{cases}$ (значение в нуле, как уже отмечалось, не играет роли).*

С использованием данного обозначения $x'_+ = \theta(x)$, т.е. $\delta = x''_+$. В действительности имеет место общая теорема (*Л.Шварц*)

Теорема 1.1. *Любая функция из $\mathcal{K}'$ является обобщенной производной (какого-то порядка) от некоторой регулярной обобщенной функции, порождаемой непрерывной функцией (без доказательства).*

Обобщая результат утверждения 1.2, покажем, что:

Утверждение 1.3. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна и дифференцируема всюду, кроме точки $x = 0$, где она имеет разрыв первого рода. Тогда обобщенная производная этой функции есть $f' = f'(x) + [f]_{x=0}\,\delta$, где $f'(x)$ - классическая производная (определенная всюду, кроме точки $x = 0$) и $[f]_{x=0} = \lim\limits_{x\to+0} f(x) - \lim\limits_{x\to-0} f(x)$ — величина скачка $f(x)$.*

$$\blacksquare\ (f', \phi) = (f, -\phi') = -\int\limits_{-\infty}^{0} f(x)\phi'(x)dx - \int\limits_0^{\infty} f(x)\phi'(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} f'(x)\phi(x)dx + \int\limits_0^{\infty} f'(x)\phi(x)dx + [f]_{x=0}\,\phi(0) = (f'(x) + [f]_{x=0}\,\delta, \phi)\ \blacksquare$$

1.2.2 Замена переменной обобщенной функции

Как уже отмечалось, говорить о значениях обобщенной функции в отдельных точках бессмысленно. Однако, начиная с данного момента, мы будем для обобщенной функции использовать обозначение $f(x)$ (вместо f) с тем, чтобы отличать обобщенную функцию f от другой обобщенной функции $f(t(x))$, которую мы введем следующим образом:

Определение 1.11. Пусть $t(x) \in C^\infty$ — строго монотонная функция, т.е.существует обратная к ней: $y = t(x) \rightsquigarrow x = \tau(y)$. Тогда под $f(t(x))$ понимается функционал, действующий по правилу: $(f(t(x)), \phi(x)) := \left(f(x), \frac{\phi(\tau(x))}{|t'(\tau(x))|}\right)$.
(и здесь данное определение легко "оправдать" стандартными наводящими соображениями с использованием регулярных обобщенных функций).

В частности, при линейной замене переменной, $(f(ax+b), \phi) := \frac{1}{|a|}\left(f(x), \phi\left(\frac{x-b}{a}\right)\right)$.

Пример 1.5. *1) $(\delta(x - x_0), \phi) = \phi(x_0)$; 2) $\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$ (в частности, $\delta(-x) = \delta(x)$).*

Утверждение (1.3) можно теперь обобщить, считая, что функция имеет конечное или счетное число разрывов первого рода в точках x_k. Вклад каждого из этих разрывов в обобщенную производную составит $[f(x)]_{x=x_k}\,\delta(x - x_k)$.

Пример 1.6. *Пусть $[x]$ означает целую часть числа x. Обобщенная производная этой функции есть $[x]' = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n)$ (вопрос о сходимости ряда из обобщенных функций обсуждается в следующем разделе).*

1.2.3 *Сходимость в пространстве $\mathcal{K}'$*

Определение 1.12. Последовательность обобщенных функций $f_n \in \mathcal{K}'$ сходится, если $\exists f \in \mathcal{K}'$ такая, что $\forall\ \phi \in \mathcal{K}$ $(f_n, \phi) \xrightarrow[n\to\infty]{} (f, \phi)$ (пишем $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{K}'} f$; такую сходимость часто называют "слабой").

Замечание 1.4. *Ряд* $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n)$, *встретившийся в примере 1.6, сходится:*

$$(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n), \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \phi(n) = \sum_{n=-N}^{N} \phi(n)\,,$$

где интервал $[-N, N] \supset \operatorname{supp} \phi$.

Определение 1.13. Последовательность функций называется δ-образной, если она сходится к δ-функции.

Упражнение 1.2. *Докажите, что последовательность функций* $g_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & x<0,\ \ x>\varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon}, & 0<x<\varepsilon \end{cases}$ *является δ-образной.*

Пример 1.7. *(δ-образной последовательности) Рассмотрим последовательность (гладких) функций* $g_\varepsilon(x) := \frac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\varepsilon}\right)$. *Докажем, что* $(g_\varepsilon, \phi) \underset{\varepsilon\to0}{\to} \phi(0)$, *т.е.* $g_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to0]{\mathcal{K}'} \delta$.

$$\blacksquare \quad (g_\varepsilon, \phi) = \int g_\varepsilon(x)\phi(x)dx = \int g_\varepsilon(x)\left[\phi(x) - \phi(0)\right]dx + \phi(0)\int g_\varepsilon(x)dx\,.$$

*Последний интеграл справа равен единице, что становится видным после замены переменной $x/\sqrt{\varepsilon} \rightsquigarrow x$. Осталось показать, что первый интеграл справа стремится к нулю вместе с ε.**

Заметим, что $\forall\ a>0$ *и* $0<\delta<\frac{1}{2}$

$$\int_{a\varepsilon^{\frac{1}{2}-\delta}}^{\infty} g_\varepsilon(x)dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{a\varepsilon^{-\delta}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}x}\ e^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_{a\varepsilon^{-\delta}}^{\infty} - \int_{a\varepsilon^{-\delta}}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi}x^2}\ e^{-\frac{x^2}{2}}dx \underset{\varepsilon\to0}{=} \mathrm{O}\left(e^{-\frac{a^2}{2\varepsilon^{2\delta}}}\right)\,.$$

Поэтому

$$\left|\int \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\left[\phi(\sqrt{\varepsilon}x) - \phi(0)\right]dx\right| = \left|\int_{-\infty}^{-a\varepsilon^{-\delta}} + \int_{a\varepsilon^{-\delta}}^{a\varepsilon^{-\delta}} + \int_{a\varepsilon^{-\delta}}^{\infty}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{const}\ \mathrm{O}\left(e^{-\frac{a^2}{2\varepsilon^{2\delta}}}\right) + \max_{[-a\varepsilon^{-\delta}, a\varepsilon^{-\delta}]}\left|\phi(\sqrt{\varepsilon}x) - \phi(0)\right|\,,$$

где через const *обозначены оценки* $|\phi(\sqrt{\varepsilon}x) - \phi(0)|$ *на полубесконечных интервалах. В силу непрерывности $\phi(x)$ и с учетом $\delta < \frac{1}{2}$ последнее слагаемое в этой оценке* $\underset{\varepsilon\to0}{\to} 0$. $\blacksquare$

Замечание 1.5. *В обоих приведенных выше примерах δ-образной последовательности существенным обстоятельством является единичная площадь под графиком функций $g_\varepsilon(x)$.*

---

*Суть дела здесь в том, что при малых ε область, существенная для интегрирования - это узкий интервал в окрестности нуля, на котором разность $[\phi(x) - \phi(0)]$ мала.

Утверждение 1.4. *Сходящиеся последовательности (и ряды) из обобщенных функций можно почленно дифференцировать (любое число раз).*

$$\blacksquare\ (f_n', \phi) = -(f_n, \phi') \underset{n\to\infty}{\to} -(f, \phi') = (f', \phi)\ \blacksquare$$

1.2.4 Формула суммирования Пуассона

Используя утверждение 1.4, нетрудно получить известную формулу, имеющую многочисленные приложения.

Рассмотрим функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[0, 2\pi]$ по формуле $f(x) = \frac{x}{2\pi}$ и продолженную за пределы этого отрезка с периодом 2π. Как и всякая периодическая функция, она раскладывается в ряд Фурье (который, как известно, сходится к самой функции в точках непрерывности и к серединным значением в точках разрыва):

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad c_k := \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{x}{2\pi} e^{-ikx} dx = \begin{cases} \frac{i}{2\pi k}, & k \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & k = 0 \end{cases}.$$

Функция $f(x)$ локально-суммируема; соответствующую ей регулярную обобщенную функцию можно дифференцировать, и при этом применить почленное дифференцирование ряда Фурье. Получаем

$$\frac{1}{2\pi} - \sum_k \delta(x - 2\pi k) = f'(x) = -\sum_{k\neq 0} \frac{1}{2\pi} e^{ikx}$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{2\pi} \sum_k e^{ikx} = \sum_k \delta(x - 2\pi k)\,.$$

Это и есть формула суммирования Пуассона (в одном из вариантов).

1.3 ЛОКАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Несмотря на то, что о значениях обобщенных функций в точках говорить бессмысленно, можно ввести понятие носителя обобщенной функции (т.е. множества точек, на которых она отлична от нуля) и, как следствие, можно сравнивать обобщенные функции на интервалах.

1.3.1 Носитель обобщенной функции

Определение 1.14. Обобщенная функция f называется равной нулю на интервале (a, b) (на множестве I; пишем $f|_I = 0$), если $(f, \phi) = 0$ для всех пробных функций ϕ, обращающихся в ноль **<u>вне</u>** интервала (a, b) (множества I).

Определение 1.15. Две обобщенные функции совпадают на интервале (множестве), если их разность равна нулю на этом интервале (множестве).

Определение 1.16. Носителем обобщенной функции называется:
$\operatorname{supp} f := \mathbb{R} \backslash \bigcup \Big\{ (a, b) :\ f|_{(a,b)} = 0 \Big\}$.

Замечание 1.6. *Разумеется, определение обобщенного носителя совпадает с классическим носителем регулярных обобщенных функций, например,* $\operatorname{supp}\theta(x) = (0, \infty)$ *(проверьте!).*

Определение 1.17. Обобщенная функция называется финитной, если существует конечный интервал, содержащий внутри себя ее носитель.

Утверждение 1.5. $\operatorname{supp}\delta(x) = \{0\}$
■ $\forall\ \phi(x)$ такой, что $\phi(0) = 0$, $(\delta(x), \phi) = 0$. Поэтому $\delta(x)|_{\{x\neq 0\}} = 0$ ■

В связи с этим можно говорить, что δ-функция "сосредоточена в точке $x = 0$".

Носитель обобщенной функции обладает следующими свойствами (проверьте!):

Утверждение 1.6. *1)* $\forall\ h(x) \in C^\infty \quad \operatorname{supp} h(x)f(x) \subseteq \operatorname{supp} f(x)$, *причем* $h(x)|_I = 0 \Rightarrow h(x)f(x)|_I = 0$ *(таким образом,* $\phi(x)f(x)$, $\phi \in \mathcal{K}$ *— всегда финитная обобщенная функция).*
2) $\operatorname{supp} f'(x) \subseteq \operatorname{supp} f(x)$ *(т.е. можно говорить об обобщенном дифференцировании как о локальной операции).*

В частности, $\operatorname{supp}\delta^{(n)} = \{0\}$. Более того, ниже мы увидим, что любая обобщенная функция, сосредоточенная в нуле (любой точке), представляется в виде линейной комбинации δ-функции и её производных.

1.3.2 Обобщенные решения уравнения $x^m f(x) = 0$

Напомним, что под обобщенным решением уравнения понимается такой функционал f, который анулирует действие левой части уравнения на любую пробную функцию.

Утверждение 1.7. *Обобщенным решением уравнения* $xf(x) = 0$ *является* $f(x) = C\delta(x)$, *где* C *— произвольная постоянная.*

■ Зафиксируем произвольную пробную функцию $\phi_0(x)$, удовлетворяющую дополнительному условию $\phi_0(0) = 1$, и составим вспомогательную функцию

$$\psi(x) = \frac{1}{x}\left[\phi(x) - \phi(0)\phi_0(x)\right] ,$$

где $\phi(x)$ — произвольная пробная функция. Проверим, что $\psi(x) \in \mathcal{K}$. Действительно, финитность ψ вытекает из финитности ϕ, а существование производных — из возможности переписать $\psi(x)$ в виде интеграла

$$\psi(x) = \frac{1}{x}\int\limits_0^x \left[\phi'(t) - \phi(0)\phi_0'(t)\right] dt = \int\limits_0^1 \left[\phi'(xt) - \phi(0)\phi_0'(xt)\right] dt$$

который, очевидно, можно дифференцировать по x любое число раз.

С помощью функции ψ действие функционала f, удовлетворяющего уравнению $xf(x) = 0$, на произвольную пробную ϕ, записывается как:

$$(f, \phi) = (f, x\psi + \phi(0)\phi_0) = (xf, \psi) + \phi(0)(f, \phi_0) = C(\delta, \phi) ,$$

где $C = (f, \phi_0)$ (напомним, что $\phi_0(x)$ была выбрана произвольно) и $(xf, \psi) = 0$ в силу $\psi \in \mathcal{K}$. Таким образом, $f(x) = C\delta(x)$ ■.

Лемма 1.1. *Общим решением уравнения $xf(x) = g(x)$ является $f(x) = f_*(x) + C\delta(x)$, где $f_*(x)$ — какое-либо частное решение этого уравнения.*

■ Разность $f - f_*$ удовлетворяет $x(f - f_*) = 0$ *и поэтому равна* $C\delta(x)$ ■

Следствие 1.2. Обобщенным решением уравнения $x^2 f(x) = 0$ является $C_1\delta(x) + C_2\delta'(x)$.

■ По доказанному в утверждении 1.7 $xf(x) = C\delta(x)$. Частное решение последнего уравнения легко угадать:

$$(x\delta', \phi) = (-\delta, x\phi' + \phi) = -\phi(0) = (-\delta, \phi)$$

$\Rightarrow f_* = -C\delta'$. Используя лемму 1.1, после переобозначения произвольных постоянных получаем искомую формулу. ■

Упражнение 1.3. *Докажите (по индукции), что обобщенным решением уравнения $x^m f(x) = 0$ является $f(x) = C_0\delta(x) + \dots + C_{m-1}\delta^{(m-1)}(x)$.*

Пример 1.8. *Уравнение $x^3(x-1)^2 y(x) = 0$ имеет общим решением $A_0\delta(x) + A_1\delta'(x) + A_2\delta''(x) + B_0\delta(x-1) + B_1\delta'(x-1)$*

1.4 СТЕПЕННЫЕ ОСОБЕННОСТИ

1.4.1 Регуляризация степенных особенностей

Определение 1.18. Регуляризацией функции $f(x)$, имеющей неинтегрируемую особенность вида $\frac{1}{(x-x_0)^\alpha}$, называется функционал (f, ϕ), который для пробных функций $\phi(x)$, равных нулю в окрестности точки x_0, выражается интегралом $\int f(x)\phi(x)dx$.

Ниже мы изучим регуляризацию особенностей с целочисленными степенями. Сведения, касающиеся регуляризации дробно-степенных особенностей, можно найти в дополнении I.

1.4.2 Обобщенная функция $\mathcal{P}\frac{1}{x}$

Какой функционал отвечает классической функции $\frac{1}{x}$? Интеграл $\int \frac{\phi(x)}{x}dx$ не имеет смысла из-за расходимости в нуле. Смысл имеют, например, такие (но не только!) интегралы:

$$\text{V.p.} \int \frac{\phi(x)}{x}dx\,, \quad \int\limits_{-R}^{R} \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x}dx\,, \text{ где } \operatorname{supp}\phi(x) \subset [-R, R]\,.^*$$

Определение 1.19. $\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \phi\right) := \text{V.p.} \int \frac{\phi(x)}{x}dx$

*Отметим, что функционал $\int\limits_{-R}^{R} \frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}dx$ не зависит от R: действительно, $\forall\ R_1, R_2$ таких, что $\operatorname{supp}\phi(x) \subset [-R_{1,2}, R_{1,2}]$, $\left(\int\limits_{-R_2}^{-R_1} + \int\limits_{R_1}^{R_2}\right) \frac{\phi(0)}{x}dx = 0$. Вводя понятие "главного значения интеграла на ∞" как $\text{V.p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dots dx := \lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{-R}^{R} \dots dx$, мы можем переписать этот функционал как $\text{V.p.} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}dx$.

Замечание 1.7. *Понятно, что если функция $\phi(x)$ равна нулю в окрестности нуля, то знак главного значения можно убрать; поэтому написанное выражение является регуляризацией функции $\frac{1}{x}$ в смысле определения 1.18.*

Предельный переход под знаком интеграла в смысле главного значения нуждается в дополнительном обосновании, поэтому в непрерывности этого функционала проще убедиться показав, что:

Утверждение 1.8. $\mathrm{V.p.}\int \frac{\phi(x)}{x}dx = \int\limits_{-R}^{R} \frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}dx$

■ $\mathrm{V.p.}\int \frac{\phi(x)}{x}dx = \mathrm{V.p.}\int\limits_{-R}^{R} \frac{\phi(x)}{x}dx = \mathrm{V.p.}\int\limits_{-R}^{R} \frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}dx + \phi(0)\,\mathrm{V.p.}\int\limits_{-R}^{R} \frac{1}{x}dx$, причем в первом интеграле справа знак главного значения можно убрать, а второй — равен нулю. ■

Что касается функционала $\int\limits_{-R}^{R} \frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}dx$, то его непрерывность следует из:

$$\int\limits_{-R}^{R} \frac{\phi_n(x)-\phi_n(0)}{x}dx \underset{\xi_n\in(0,x)\subset(-R,R)}{=} \int\limits_{-R}^{R} \frac{x\phi_n(\xi_n)}{x}dx \underset{n\to\infty}{\to} 0\,,$$

если $\phi_n \xrightarrow{\mathcal{K}} 0$.

1.4.3 Обобщенные решения уравнения $x^m f(x) = 1$

Утверждение 1.9. $x\mathcal{P}\frac{1}{x} = 1$

■ $\left(x\mathcal{P}\frac{1}{x}, \phi\right) = \left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, x\phi\right) = \mathrm{V.p.}\int \phi(x)dx = \int \phi(x)dx = (1, \phi)$ ■

Таким образом, общее обобщенное решение уравнения $xf(x) = 1$ есть $f(x) = \mathcal{P}\frac{1}{x} + C\delta(x)$.

Какой функционал отвечает $\frac{1}{x^2}$? Например, можно принять следующее

Определение 1.20. $\left(\mathcal{P}\frac{1}{x^2}, \phi\right) := \mathrm{V.p.}\int \frac{\phi(x)-\phi(0)}{x^2}dx.$

Утверждение 1.10. $x^2\mathcal{P}\frac{1}{x^2} = 1$

■ $\left(x^2\mathcal{P}\frac{1}{x^2}, \phi\right) = \left(\mathcal{P}\frac{1}{x^2}, x^2\phi\right) = \mathrm{V.p.}\int \frac{x^2\phi(x) - \left.(x^2\phi(x))\right|_{x=0}}{x^2}dx = \int \phi(x)dx = (1, \phi)$ ■

Утверждение 1.11. $\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}\right)' = -\mathcal{P}\frac{1}{x^2}$

■
$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}', \phi\right) = -\mathrm{V.p.}\int \frac{\phi'(x)}{x}dx = -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\right)\frac{\phi'(x)}{x} =$$
$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\right)\frac{\phi(x)}{x^2}dx - \left.\left(\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x} + \frac{\phi(0)}{x}\right)\right|_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\right] = -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\right)\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x^2}dx =$$
$$= -\mathrm{V.p.}\int \frac{\phi(x)-\phi(0)}{x^2}dx$$

(слагаемое $\left.\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}\right|_{-\varepsilon}^{\varepsilon}$ исчезает под знаком предела, а $-\left.\frac{\phi(0)}{x}\right|_{-\varepsilon}^{\varepsilon}$ мы записываем как $\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\phi(0)}{x^2}dx$).

■

По аналогии со сказанным, дадим следующее определение:

Определение 1.21. $\left(\mathcal{P}\frac{1}{x^m},\phi\right) := \text{V.p.}\int \frac{\phi(x)-\phi(0)-x\phi'(0)-\dots-\frac{x^{m-2}}{(m-2)!}\phi^{(m-2)}(0)}{x^m}dx$

и убедимся, что $x^m\mathcal{P}\frac{1}{x^m} = 1$ (проверьте!). Таким образом, общее решение уравнения $x^m f(x) = 1$ есть $\mathcal{P}\frac{1}{x^m} + C_0\delta(x) + \dots + C_{m-1}\delta^{(m-1)}(x)$.

Пример 1.9. *Уравнение* $(x^2-1)y(x) = 1$ *имеет общим решением* $\frac{1}{2}\mathcal{P}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{2}\mathcal{P}\frac{1}{x+1}+C_1\delta(x-1)+C_2\delta(x+1)$

1.4.4 Формулы Сохоцкого

Вернемся к уравнению $xf(x) = 1$. Возможен ещё один способ регуляризации функции $\frac{1}{x}$, связанный со смещением особенности в комплексную плоскость.

Определение 1.22. Функционалы $\frac{1}{x\pm i0}$ определим как: $\left(\frac{1}{x\pm i0},\phi\right) := \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\frac{\phi(x)}{x\pm i\varepsilon}dx.$

Утверждение 1.12. *(формулы Сохоцкого)* $\frac{1}{x\pm i0} = \mathcal{P}\frac{1}{x} \mp i\pi\delta(x)$

$$\blacksquare \int\frac{\phi(x)}{x\pm i\varepsilon}dx = \int\limits_{-R}^{R}\dots = \int\limits_{-R}^{R}\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x\pm i\varepsilon}dx + \phi(0)\int\limits_{-R}^{R}\frac{dx}{x\pm i\varepsilon}.$$

В первом интеграле справа можно перейти к пределу $\varepsilon\to 0$ под знаком интеграла; результат предельного перехода в силу утверждения 1.8 совпадает с $\mathcal{P}\frac{1}{x}$. Второй интеграл справа вычисляется явно (домножением на выражение, сопряженное к знаменателю) и равен $\mp 2i\arctan\frac{R}{\varepsilon}\underset{\epsilon\to 0}{\to}\mp i\pi$, что и доказывает формулы Сохоцкого. $\blacksquare$

Замечание 1.8. *Т.к. функционалы* $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ *и* $\frac{1}{x\pm i0}$ *отличаются на* δ*-функцию (т.е. на решение однородного уравнения* $xf = 0$*), то* $x\frac{1}{x\pm i0} = 1$.

1.5 СВЕРТКА ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

1.5.1 Классическая свертка

Определение 1.23. Сверткой функций $f(x)$ и $g(x)$ называется новая функция, определяемая равенством: $(f*g)(x) := \int f(t)g(x-t)dt.$

Достаточными условиями для существования свертки (сходимости интеграла) будут, очевидно, требование локальной суммируемости функции $f(t)g(x-t)$ при любом x плюс одно из следующих требований, касающихся поведения на бесконечности: *1)* либо одна из функций финитна, *2)* либо обе функции полуфинитны (т.е. обращаются в ноль при $x\leqslant a$ или при $x\geqslant b$). Ясно, что вместо финитности можно говорить о быстром убывании.

Отметим следующие, элементарно проверяемые, свойства классической свертки:

Утверждение 1.13. *1)* $f*g = g*f$; *2)* $(f*g)' = f*g' = f'*g$; *3)* $(f*g)*h = f*(g*h)$

Пример 1.10. *Вспомним обозначение 1.1* $f_+(x)$ *для функций, продолженных нулем в область отрицательных значений аргумента. Имеем:* $f_+*g_+ = \left(\int\limits_0^x f(t)g(x-t)dt\right)_+$. *В частности,* $\theta*\theta = x_+$.

1.5.2 Обобщенная свертка

В качестве наводящего соображения запишем классическую свертку как регулярный функционал:

$$
\begin{aligned}
((f*g)(x),\phi(x)) &= \int\left(\int f(t)g(x-t)dt\right)\phi(x)dx = \\
&= \int f(t)\left(\int g(x-t)\phi(x)dx\right)dt = \\
&= \int f(t)\left(\int g(y)\phi(x+y)dy\right)dt = \\
= (f(x),(g(y),\phi(x+y)))\ .
\end{aligned}
$$

Таким образом, естественно следующее определение обобщенной свертки:

Определение 1.24. $((f*g)(x),\phi(x)) := (f(x),(g(y),\phi(x+y)))$

Приведенное определение корректно, например, для случая финитной обобщенной функции g.

Утверждение 1.14. *Если g - финитная обобщенная функция, то:*
1) Функция $\psi(x) := (g(y),\phi(x+y)) \in \mathcal{K}$
2) $f*g$ является линейным непрерывным функционалом.

■ *1)* Дифференцируемость ψ вытекает из непрерывности g и дифференцируемости ϕ. Отметим, что носитель функции $\phi(x+y)$ на плоскости xy представляет из себя наклоненную под углом -45^o полосу ширины $\operatorname{supp}\phi$ (функция $\phi(x+y)$ не является финитной по совокупности переменных!); носитель $g(y)$ на той же плоскости изображается горизонтальной полосой; проекция пересечения этих двух полос на ось x и представляет из себя носитель $\psi(x)$.

2) Поскольку линейность очевидна, надо показать, что

$$\phi_n(x) \xrightarrow{\mathcal{K}} 0 \quad \Rightarrow \quad \psi_n(x) := (g(y),\phi_n(x+y)) \xrightarrow{\mathcal{K}} 0\,.$$

Сходимость к нулю вытекает из непрерывности функционала g. Осталось проверить, что сходимость равномерная и что все функции $\psi_n(x)$ имеют общий носитель.

Предположим, что сходимость неравномерная, т.е. существует последовательность $\{x_n\}$, на которой при всех n $|\psi_n(x_n)| \geqslant \varepsilon$. Но это противоречит $(g(y),\phi(x_n+y)) \to 0$, вытекающему из равномерной сходимости $\phi(x_n+y)$.

Общий носитель всех функций $\psi_n(x)$ есть проекция на ось x пересечения полос, изображающих носитель $g(y)$ и объединение носителей всех $\phi_n(x)$. ■

Итак, обобщенная свертка существует, если обобщенная функция g финитна. Из доказанной ниже коммутативности свертки вытекает, что она будет существовать и в случае финитной f.

Покажем, что для обобщенной свертки также справедливы свойства 1.13.

■ *1)* По теореме 1.1 f и g могут быть представлены как $f(x) = p^{(m)}(x)$, $g(x) = q^{(n)}(x)$, где $p(x)$ и $q(x)$ — непрерывные функции, m и n — некоторые целые числа. С учетом этого

$$(f*g,\phi) = \left(p^{(m)}(x),\left(q^{(n)}(y),\phi(x+y)\right)\right) =$$
$$= (-1)^m\left(p(x),\left(q^{(n)}(y),\phi^{(m)}(x+y)\right)\right) = (-1)^{m+n}\left(p(x),\left(q(y),\phi^{(m+n)}(x+y)\right)\right) =$$

$$\underset{\blacktriangle}{=} (-1)^{m+n}\left(q(y), \left(p(x), \phi^{(m+n)}(x+y)\right)\right) = \cdots = (g*f, \phi)$$

(равенство ▲ справедливо, поскольку свертка $p*q$ является классической).

2) $((f*g)', \phi) = (f*g, -\phi') = (f(x), (g(y), -\phi'(x+y))) = (f(x), (g'(y), \phi(x+y))) = (f*g', \phi)$; из коммутативности свертки $(f*g)' = (g*f)' = g*f' = f'*g$.

3) доказывается аналогично *1)*. ■

Пример 1.11. $\forall\ f \in \mathcal{K}'\ \ \delta * f = f * \delta = f;\ \ \ \delta(x-x_0) * f = f * \delta(x-x_0) = f(x-x_0)^*$.

1.6 ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В этом разделе мы будем рассматривать линейные обыкновенные дифференциальные уравнения вида

$$\mathcal{L}y(x) \equiv \sum_{k=0}^{n} p_k(x)\frac{d^k}{dx^k}y(x) = f(x)\,. \tag{1.2}$$

с гладкими коэффициентами.

1.6.1 Обобщенные и классические решения

Классическое решение - это функция $y(x)$, имеющая n непрерывных производных и удовлетворяющая уравнению (1.2). Такое решение заведомо существует, если все коэффициенты и правая часть в этом уравнении — гладкие функции, причем $p_n(x) \neq 0$.

Определение 1.25. Оператором, сопряженным к $\mathcal{L}$, называется оператор $\mathcal{L}^*$, определяемый равенством:

$$\mathcal{L}^*y(x) := \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{d^k}{dx^k}\left(p_k(x)y(x)\right)\,.$$

Определение 1.26. Обобщенным решением дифференциального уравнения называется такой функционал y, что для любой пробной функции выполняется равенство (называемое интегральным тождеством) $(y, \mathcal{L}^*\phi) = (f, \phi)$.

Утверждение 1.15. *1) Классическое решение является обобщенным;*
2) Обобщенное решение, имеющее n непрерывных производных, является классическим.

■ Доказательство этих утверждений вытекает из того факта, что для гладких решений имеет место тождество (получаемое интегрированием по частям)

$$(y, \mathcal{L}^*\phi) = \int y(x)\left(\mathcal{L}^*\phi(x)\right)dx = \int \left(\mathcal{L}y(x)\right)\phi(x)dx = \int f(x)\phi(x)dx = (f, \phi)\,.\ \blacksquare$$

Утверждение 1.16. *Уравнение $y'(x) = 0$ имеет только классическое решение.*

---

*Существование свертки любой f с δ-функцией вытекает из финитности последней.

■ Фиксируем произвольную пробную функцию $\phi_0(x)$, удовлетворяющую условию $\int \phi_0(x)dx = 1$. Заметим, что любая пробная функция $\phi(x)$ может быть представлена как $\phi(x) = \psi'(x) + A\phi_0(x)$, где $\psi(x) \in \mathcal{K}$ и $A = \int \phi(x)dx$. Действительно, разрешив это равенство относительно $\psi'(x)$ и проинтегрировав, получим

$$\psi(x) = \psi(-\infty) + \int\limits_{-\infty}^{x} \phi(t)dt - A \int\limits_{-\infty}^{x} \phi_0(t)dt\,.$$

Из данного представления вытекает бесконечная гладкость ψ. Положим $\psi(-\infty) = 0$. Из финитности $\phi(x)$ и $\phi_0(x)$ вытекает $\psi(x) \equiv 0$ при $x < -R$, где R достаточно велико. Кроме того, при $x > R$ $\psi(R) = \int\limits_{-\infty}^{R} \phi(x)dx - A \int\limits_{-\infty}^{R} \phi_0(x)dx = \int \phi(x)dx - A = 0$, т.е. ψ финитная функция. Таким образом, $\psi \in \mathcal{K}$.

Для любого решения уравнения $y' = 0$ имеем $(y, \phi) = (y, \psi' + A\phi_0) = (y', -\psi) + A(y, \phi_0)$. Первое слагаемое здесь равно нулю в силу уравнения; во втором слагаемом (y, ϕ_0) является произвольной постоянной, зависящей от выбора ϕ_0. Таким образом, $(y, \phi) = AC = C \int \phi(x)dx = (C, \phi)$, т.е. $y = C$. ■

Пример 1.12. *Рассмотрим уравнение $xy' = 0$. Мы знаем, что $y' = C_1\delta(x)$. Частным решением последнего уравнения является $C_1\theta(x)$, а общим решением соответствующего однородного уравнения — C_2. Поэтому окончательно $y(x) = C_1\theta(x) + C_2$.*

В действительности, утверждение 1.16 допускает следующее обобщение (без доказательства):

Теорема 1.2. *Уравнение (1.2) при $p_n(x) \neq 0$ и непрерывной $f(x)$ имеет только классические решения.*

Пример 1.13. *Рассмотрим уравнение $xy' + (1 - \lambda)y = 0$. Это — уравнение Эйлера, его классическое решение хорошо известно: $y_{cl} = x^{\lambda-1}$. Какие обобщенные решения имеет это уравнение? Поскольку коэффициент при старшей производной обращается в ноль только при $x = 0$, то можно попробовать искать (какое-то) обобщенное решение в виде линейной комбинацией δ-функции и ее производных. Учитывая формулу $x\delta^{(p)} = -p\delta^{(p-1)}$ заключаем, что такое решение существует, если при некотором целом не отрицательном p выполняется $-p + 1 - \lambda = 0$, т.е. $\lambda \in \mathbb{Z}$, $\lambda \leqslant 1$. При этом искомое обобщенное решение $y_{gen} = \delta^{(1-\lambda)}(x)$. В общем случае произвольных λ обобщенные решения тоже существуют, и связаны они с регуляризацией дробно-степенных особенностей (см. приложение I).*

1.6.2 Фундаментальные решения

Определение 1.27. Фундаментальным решением оператора $\mathcal{L}$ называется обобщенная функция, удовлетворяющая уравнению $\mathcal{L}\mathcal{E} = \delta$.

Очевидно, фундаментальное решение не изменится, если к нему прибавить любое решение однородного уравнения $\mathcal{L}y = 0$.

Пример 1.14. $\mathcal{L} = \frac{d^2}{dx^2} - 1 \Rightarrow \mathcal{E}(x) = \theta(x)\sinh(x)$; *однако можно вычесть из этого решения $\frac{1}{2}e^x$, и тогда оно принимает симметричный вид $\mathcal{E}(x) = -\frac{1}{2}e^{-|x|}$.*

В дальнейшем мы часто будем иметь дело с фундаментальным решением $\mathcal{E}_+$, фиксированным условием $\mathcal{E}|_{x<0} = 0$:

Утверждение 1.17. *Фундаментальное решение $\mathcal{E}_+$, фиксированное дополнительным условием $\mathcal{E}|_{x<0} = 0$, единственно, если в (1.2) $p_n(x) \neq 0$.*

■ В случае существования двух таких фундаментальных решений их разность, при сделанных предположениях, была бы классическим (см. теорему 1.2) решением однородного уравнения (1.2), тождественно равным нулю при $x < 0$. Таким решением может быть только ноль. ■

Важнейшим свойством фундаментального решения является следующее:

Утверждение 1.18. *Свертка $y = \mathcal{E} * f$ (если существует) удовлетворяет уравнению $\mathcal{L}y = f$.*

■ Действительно, $\mathcal{L}(\mathcal{E} * f) = (\mathcal{L}\mathcal{E}) * f = \delta * f = f$. ■

Пример 1.15. *Частным решением уравнения $y'' - y = f$ является интеграл*

$$\int \mathcal{E}(t)f(x-t)dt = \int\limits_0^\infty \sinh(t)f(x-t)dt \quad \left(\text{или } \ \frac{1}{2}\int e^{-|t|}f(x-t)dt \right).$$

Существует простой способ построить фундаментальное решения для оператора (1.2) при условии $p_n(x) \neq 0$:

Утверждение 1.19. $\mathcal{E}_+ := \mathcal{E}_+(x) = \begin{cases} \widetilde{u}(x), & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$, *где $\widetilde{u}(x)$ - частное решение однородного уравнения $\mathcal{L}\widetilde{u} = 0$, удовлетворяющее начальным данным $\widetilde{u}(0) = 0, \dots, \widetilde{u}^{(n-2)}(0) = 0$, $\widetilde{u}^{(n-1)}(0) = 1/p_n(0)$.*

■ Заметим, что $\mathcal{E}_+$ — регулярный функционал, порождаемый кусочно-гладкой функцией $\mathcal{E}_+(x)$, причем $[\mathcal{E}_+(x)]\big|_{x=0} = \dots = \left[\mathcal{E}_+^{(n-2)}(x)\right]\Big|_{x=0} = 0$, $\left[\mathcal{E}_+^{(n-1)}(x)\right]\Big|_{x=0} = 1/p_n(0)$. Поэтому, обозначая фигурными скобками классические производные $\mathcal{E}_+(x)$, получаем: $\frac{d}{dx}\mathcal{E}_+(x) = \left\{\mathcal{E}_+'(x)\right\} + [\mathcal{E}_+(x)]\big|_{x=0}\delta(x) = \left\{\mathcal{E}_+'(x)\right\}, \dots, \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\mathcal{E}_+(x) = \left\{\mathcal{E}_+^{(n-1)}(x)\right\} + \left[\mathcal{E}_+^{(n-2)}(x)\right]\Big|_{x=0}\delta(x) = \left\{\mathcal{E}_+^{(n-1)}(x)\right\}$, $\frac{d^n}{dx^n}\mathcal{E}_+(x) = \left\{\mathcal{E}_+^{(n)}(x)\right\} + \left[\mathcal{E}_+^{(n-1)}(x)\right]\Big|_{x=0}\delta(x) = \left\{\mathcal{E}_+^{(n)}(x)\right\} + \frac{1}{p_n(0)}\delta(x)$. В результате $\mathcal{L}\mathcal{E}_+ = \mathcal{L}\widetilde{u} + \frac{p_n(x)}{p_n(0)}\delta(x) = \delta(x)$. ■

В примерах, рассмотренных в настоящем параграфе, $\sinh(x)$ как раз и является решением $u(x)$, удовлетворяющим начальным условиям утверждения 1.19.

1.6.3 Обобщенная задача Коши

Рассмотрим (классическую) задачу Коши для уравнения (1.2) с коэффициентами класса C^∞ в предположении $p_n(x) \neq 0$:

$$\mathcal{L}y = f\,, \quad y^{(k)}\big|_{x=0} = y_k\,, \quad k = 0, ..., n-1\,. \tag{1.3}$$

Решения задачи Коши ищутся при $x > 0$. Поставим задачу отыскания функции y_+, совпадающей при $x > 0$ с решением уравнения (1.3) и продолженной нулем (т.е., вообще говоря, не гладким образом) на область отрицательных x. Аналогично введем функцию f_+, однако сохраним за продолженными функциями прежнее обозначения: $y_+ \rightsquigarrow y$, $f_+ \rightsquigarrow f$. Посмотрим, какому уравнению удовлетворяет такое обобщенное решение. Как и выше, находим: $y' = \{y'(x)\} + y_0\delta(x)$, $y'' = \{y''(x)\} + y_0\delta'(x) + y_1\delta(x), \ldots,$ $y^{(k)} = \{y^{(k)}(x)\} + \sum\limits_{j=0}^{k-1} y_j\delta^{(k-j-1)}(x)$, где фигурными скобками обозначены классические производные. Подстановка этих формул в уравнение (1.3) приводит к

$$\mathcal{L}y = \{\mathcal{L}y\} + \sum_{k=0}^{n-1} c_k\delta^{(k)}(x) = f(x) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k\delta^{(k)}(x)\,, \quad c_k = \sum_{j=0}^{n-k-1} p_{k+j+1}(x)y_j\,. \tag{1.4}$$

Упражнение 1.4. *Выведите формулу* $h(x)\delta^{(m)}(x) = \sum\limits_{l=0}^{m}(-1)^l h^{(l)}(0)\delta^{(m-l)}(x)$, *где* $h(x)$ *— гладкая функция, и с ее помощью преобразуйте выражение для постоянных* c_k *в 1.4.*

Таким образом, мы приходим к следующему определению:

Определение 1.28. Обобщенной задачей Коши называется уравнение (1.4).

Это задача может быть решена при помощи фундаментального решения: $y = \mathcal{E}_+ * \left(f(x) + \sum\limits_{k=0}^{n-1} c_k\delta^{(k)}(x)\right) = \mathcal{E}_+ * f + \sum\limits_{k=0}^{n-1} c_k\widetilde{u}^{(k)}(x)$, где $\widetilde{u}$ - частное решение уравнения $\mathcal{L}u = 0$, фигурирующее в утверждении 1.19. .

Пример 1.16. *Рассмотрим частный случай задачи (1.3), в котором* $f = 0$, $y_0 = \cdots = y_{n-2} = 0$, $y_{n-1} = 1/p_n(0)$. *Тогда в (1.4)* $c_0 = 1$, $c_1 = \cdots = c_{n-1} = 0$ *и, следовательно, обобщенное решение удовлетворяет уравнению* $\mathcal{L}y = \delta(x)$. *С учетом требования* $y\big|_{x<0} = 0$ *это решение есть ни что иное, как фундаментальное решение* $\mathcal{E}_+$ *(чего, разумеется, и следовало ожидать). Однако теперь мы можем трактовать* $\mathcal{E}_+$ *как решение задачи Коши с “данными”* $\mathcal{E}_+\big|_{x=0} = 0, \ldots, \mathcal{E}_+^{(n-2)}\Big|_{x=0} = 0$, $\mathcal{E}_+^{(n-1)}\Big|_{x=0} = 1/p_n(0)$. *Подобная интерпретация не является корректной (обобщенные функции не имеют определенных значений в точке), однако оказывается полезной при рассмотрении более общих задач Коши для уравнений в частных производных гиперболического и параболического типов.*

1.7 ЗАДАЧА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ: ФУНКЦИЯ ГРИНА И РЕЗОЛЬВЕНТА

1.7.1 Функция Грина задачи Штурма-Лиувилля

В этом и последующих параграфах мы будем иметь дело с частным случаем уравнения (1.2)

$$\mathcal{L}y = \lambda y \tag{1.5}$$

с оператором Штурма-Лиувилля

$$\mathcal{L} := -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) + q(x)\,, \quad p(x) \neq 0\,, \quad q \in C[a,b]\,, \quad p \in C^1[a,b]\,. \tag{1.6}$$

Оператор (1.6) является симметричным: $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$. Уравнение (1.5) рассматривается на отрезке $[a, b]$ (который может быть и бесконечным) с краевыми условиями вида $y(a) = 0$, $y(b) = 0$ (или с линейными однородными условиями более общего вида). Уравнение (1.5) содержит также параметр λ, роль которого прояснится ниже.

Классическая функция Грина

Классическое определение функции Грина состоит в следующем:

Определение 1.29. Функция Грина – это непрерывная функция двух переменных (x, x') (зависящая также от λ), $G \equiv G(x, x'; \lambda)$, дважды дифференцируемая по x при $x \neq x'$ и как функция x при любом $x' \in (a, b)$ удовлетворяющая уравнению и краевым условиям, причем частная производная $G_x(x, x'; \lambda)$ испытывает в точке x' скачок: $[G_x(x, x'; \lambda)]_{x=x'} = -\frac{1}{p(x')}$.

Имеет место явное представление для функции Грина. Пусть $y_a(x)$ и $y_b(x)$ – два решения однородного уравнения $(\mathcal{L} - \lambda)\, y = 0$, причем $y_a(a) = 0$, $y_b(b) = 0$, и $W(x) := y_a' y_b - y_a y_b'$ – определитель Вронского этих решений. В этих обозначениях

$$G(x, x'; \lambda) = \frac{1}{W(x')p(x')} \begin{cases} y_a(x) y_b(x')\,, & x < x' \\ y_a(x') y_b(x)\,, & x > x' \end{cases} . \tag{1.7}$$

Замечание 1.9. *В случае линейно-зависимых решений $y_{a,b}$ их определитель Вронского равен нулю, и функция Грина не существует. Но линейная зависимость y_a и y_b означает существование решения однородного уравнения (1.5), удовлетворяющего одновременно обоим краевым условиям. Таким образом, функция Грина не существует при тех значениях параметра λ (называемых собственными числами краевой задачи), при которых однородная краевая задача имеет ненулевые решения.*[*]

Пример 1.17. *Функция Грина оператора $\mathcal{L} = \frac{d^2}{dx^2} - 1$ с краевыми условиями $G \xrightarrow[|x| \to \infty]{} 0$ есть $\frac{1}{2} e^{-|x-x'|}$.*

Утверждение 1.20. *Функция Грина единственна (если она существует).*

■ Если предположить, что существуют две функции Грина, G_1 и G_2, то их разность удовлетворяет краевым условиям и уравнению $(\mathcal{L} - \lambda)\,(G_1 - G_2) = 0$ всюду на (a, b) ($(G_1)_x - (G_2)_x$ не имеет скачка!). Следовательно, $G_1 - G_2$ является классическим решением однородной краевой задачи. Но такая задача может иметь только тривиальное решение (иначе функция Грина не существует). ■

Утверждение 1.21. *Классическим решением краевой задачи для уравнения $(\mathcal{L} - \lambda)\, y = f$ при непрерывной правой части $f(x)$ является*

$$y(x) = \int_a^b G(x, x'; \lambda) f(x') dx' \,. \tag{1.8}$$

[*] Известно, что собственные числа задачи Штурма-Лиувилля однократны, вещественны и накапливаются на $+\infty$, а собственные функции ортогональны и могут быть выбраны вещественными.

■ Написанный интеграл удовлетворяет краевым условиям, т.к.им удовлетворяет $G(x,x';\lambda)$ как функция x. Сосчитаем

$$\frac{d}{dx}\int\limits_a^b G(x,x';\lambda)f(x')dx' = \frac{d}{dx}\left(\int\limits_a^x + \int\limits_x^b\right) = \int\limits_a^x \frac{dx' f(x')}{W(x')p(x')} y_a(x')y_b'(x) + \int\limits_x^b \frac{dx' f(x')}{W(x')p(x')} y_a'(x)y_b(x') \,.$$

Поскольку $y_{a,b}$ – решения однородного уравнения, то дальнейшее применение оператора $\mathcal{L}-\lambda$ под знаком интеграла анулируется. При повторном же дифференцировании по верхнему и нижнему пределам получаем

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\int\limits_a^x + \int\limits_x^b\right) = -\frac{f(x)}{p(x)}^{\,*} \quad \Rightarrow \quad (\mathcal{L}-\lambda)\int\limits_a^b G(x,x';\lambda)f(x')dx' = f(x)\,. \blacksquare$$

Замечание 1.10. *Формула (1.8) ставит в соответствие правой части f решение уравнения $(\mathcal{L}-\lambda)\,y = f$. Иными словами, эта формула описывает действие оператора (очевидно линейного) $(\mathcal{L}-\lambda)^{-1}$. Этот оператор носит название* ***резольвенты:*** $\mathcal{R}(\lambda) := (\mathcal{L}-\lambda)^{-1}$*. В нашем случае резольвента оказалась интегральным оператором, и функция Грина является его* ***ядром.***

Функция Грина и обобщенные решения

Применение оператора $(\mathcal{L}-\lambda)$ к функции Грина в классическом смысле невозможно, поскольку $G(x,x';\lambda)$ не имеет второй производной. В обобщенном смысле:

Утверждение 1.22. $(\mathcal{L}-\lambda)\,G(x,x';\lambda) = \delta(x-x')$.

$$\begin{aligned}
\blacksquare \qquad & (G,(\mathcal{L}^*-\lambda)\,\phi) = (G,(\mathcal{L}-\lambda)\,\phi) = \int G\,(\mathcal{L}-\lambda)\,\phi dx = \\
= \quad & \left(\int\limits^{x'} + \int\limits_{x'}\right) G(x,x';\lambda)\left[-\left(p(x)\phi'(x)\right)' + q(x)\phi(x) - \lambda\phi(x)\right]dx = \\
= \quad & \left(\int\limits^{x'} + \int\limits_{x'}\right)\left[G_x\,p(x)\phi'(x) + G\,q(x)\phi(x) - \lambda\phi(x)\right]dx = \\
= \quad & -\left[G_x(x,x';\lambda)\right]_{x=x'} p(x')\phi(x') + \left(\int\limits^{x'} + \int\limits_{x'}\right)(\mathcal{L}-\lambda)\,G\phi\,dx\,.
\end{aligned}$$

Поскольку $(\mathcal{L}-\lambda)\,G = 0$ при $x \neq x'$ и $[G_x]_{x=x'} = -\frac{1}{p(x')}$, то правая часть сводится к $\phi(x')$. ■
Таким образом, функция Грина “похожа” на фундаментальное решение (но при этом удовлетворяет и краевым условиям).

*Именно здесь нужна непрерывность функции f.

Утверждение 1.23. *Формула* $y(x) = \int\limits_a^b G(x,x';\lambda) f(x')dx'$ *дает обобщенное решение краевой задачи для уравнения* $(\mathcal{L}-\lambda)\,y = f$ *в случае разрывной (но локально-интегрируемой) правой части* $f(x)$*; для упрощения доказательства дополнительно предположим, что* $\operatorname{supp} f \subseteq [a,b]$.

$$
\begin{aligned}
\blacksquare \quad & (y, (\mathcal{L}^*-\lambda)\,\phi) = \\
= \quad & \int y(x)\,(\mathcal{L}^*-\lambda)\,\phi(x)dx = \int\limits_{-R}^{R}\left(\int\limits_a^b G(x,x';\lambda) f(x')dx'\right)(\mathcal{L}^*-\lambda)\,\phi(x)dx = \\
= \quad & \int\limits_a^b f(x')dx'\left(\int\limits_{-R}^{R} G(x,x';\lambda)\,(\mathcal{L}^*-\lambda)\,\phi(x)dx\right) = \int\limits_a^b f(x')(G,(\mathcal{L}^*-\lambda)\,\phi)dx' = \\
= \quad & \int\limits_a^b f(x')\,(\mathcal{L}-\lambda)\,G,\phi dx' = \int\limits_a^b f(x')\phi(x')dx' = \int f(x')\phi(x')dx' = (f,\phi)
\end{aligned}
$$

(в последней строке использовано утверждение 1.22 и предположение о $\operatorname{supp} f$). $\blacksquare$

1.7.2 $G(x,x';\lambda)$ *как функция* λ

Рассмотрим $G(x,x';\lambda)$ как функцию (вообще говоря, комплексной) переменной λ. Ясно, что в формуле (1.7) решения $y_a(x)$, $y_b(x)$, а также их определитель Вронского $W(x)$, зависят от λ и являются целыми функциями этой переменной. Как уже отмечалось, при значениях λ, совпадающих с собственными числами задачи $\{\lambda_n\}$, решения $y_a(x)$, $y_b(x)$ линейно зависимы, и, следовательно, $W(x)|_{\lambda=\lambda_n} = 0$, причем нули вронскиана простые. Тем самым имеет место

Утверждение 1.24. *Функция* $G(x,x';\lambda)$ *является мероморфной функцией* λ *с простыми полюсами в собственных числах* λ_n*.*

Вычислим вычеты функции Грина в полюсах.

Утверждение 1.25.

$$
\operatorname*{res}_{\lambda=\lambda_n} G(x,x';\lambda) = -y_n(x)\,y_n(x')\,, \tag{1.9}
$$

где $y_n(x)$ *— нормированная собственная функция, отвечающая* λ_n *(т.е. решение уравнения* $(\mathcal{L}-\lambda_n)\,y_n = 0$*, для которого* $\int_a^b y_n^2(x)dx = 1$*).*

$\blacksquare$ Вычисление вычета сводится к подсчету производной $\frac{d}{d\lambda}W\left[y_a(x;\lambda), y_b(x;\lambda)\right]\Big|_{\lambda=\lambda_n}$. Запишем уравнение (1.5) дважды:

$$
(\mathcal{L}-\lambda)y_a(x;\lambda) = 0\,, \quad (\mathcal{L}-\mu)y_b(x;\mu) = 0\,.
$$

Умножим эти уравнения, соответственно, на $y_b(x;\mu)$ и $y_a(x;\lambda)$, вычтем одно из другого и проинтегрируем по (a,b). Получим

$$
\begin{aligned}
(\lambda-\mu)\int_a^b y_a(x;\lambda)y_b(x;\mu)dx &= -p(x)\,W\left[y_a(x;\lambda), y_b(x;\mu)\right]\Big|_a^b = \\
&= -p(x)\left(y_a'(x;\lambda)y_b(x;\mu)\big|_{x=a} - y_b'(x;\mu)y_a(x;\lambda)\big|_{x=b}\right)
\end{aligned}
$$

(с учетом краевых условий). Продифференцируем последнее равенство по λ и перейдем к пределу $\lambda, \mu \to \lambda_n$ (в этом пределе с точностью до множителя $y_a(x) = y_b(x) = y_n(x)$ и, следовательно, $y_b(a) = y_a(b) = 0$). Остается

$$\int_a^b y_n^2(x)dx = p(b)\dot{y}_n(b)y_n'(b)$$

(точка обозначает производную по λ).

С другой стороны, выражение $p(x)W\left[y_a(x;\lambda), y_b(x;\mu)\right]$ не зависит от x и его производную по λ можно вычислять при любом x, например, при $x = b$. Вычисляя эту производную и переходя к тому же пределу, что и выше, получим

$$p(x)\,\frac{d}{d\lambda}W\bigg|_{\lambda=\lambda_n} = -p(b)\dot{y}_n(b)y_n'(b) = -\int_a^b y_n^2(x)dx\,.$$

Теперь из формулы (1.7) получаем

$$\operatorname*{res}_{\lambda=\lambda_n} G(x,x';\lambda) = -\frac{y_n(x)y_n(x')}{\int_a^b y_n^2(x)dx}\,. \blacksquare$$

1.7.3 Спектральное разложение функции Грина

Итак, функция Грина является мероморфной функцией λ и нам известны ее главные части в полюсах. Из комплексного анализа известно (теорема Миттаг-Лефлера), что такая функция может быть представлена в виде равномерно сходящегося ряда из однозначно вычисляемых рациональных выражений (в случае простых полюсов эти выражения суть простые дроби) плюс произвольная целая функция. При некоторых дополнительных условиях на мероморфную функцию (которые выполняются для функции Грина, проверкой чего мы заниматься не будем), аддитивная целая функция оказывается нулем. С учетом результатов предыдущего параграфа сказанное означает, что имеет место соотношение

$$G(x,x';\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{y_n(x)y_n(x')}{\lambda_n-\lambda}\,, \tag{1.10}$$

которое называется спектральным разложением функции Грина.

ГЛАВА 2

ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ МЕДЛЕННОГО РОСТА И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

2.1 КЛАССИЧЕСКОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

В этом разделе в справочном виде приводятся основные сведения о классическом преобразовании Фурье. Будем предполагать, что функции, преобразованием Фурье которых мы будем здесь заниматься, являются достаточно гладкими и достаточно быстро убывающими на бесконечности для того, чтобы над ними можно было выполнять все нижеследующие операции.

Определение 2.1. Преобразованием Фурье функции $f(x)$ называется функция вспомогательной переменной ξ (называемой переменной, двойственной к x), которая определяется как

$$\widetilde{f}(\xi) := \int e^{i\xi x} f(x) dx \,.$$

При необходимости, мы будем пользоваться более полным обозначением (вместо $\widetilde{f}(\xi)$): $F[f(x)](\xi)$.

Заметим, что преобразование Фурье естественно рассматривать в классе комплекснозначных функций, т.к., вообще говоря, $\widetilde{f}$ принимает комплексные значения даже в случае веществеенно-значной функции f. Исключение составляют четные функции, например:

Пример 2.1.

$$F\left[e^{-\gamma x^2}\right] = \int e^{-\gamma x^2 + i\xi x} dx = e^{-\frac{\xi^2}{4\gamma}} \int e^{-\gamma\left(x - i\frac{\xi}{2\gamma}\right)^2} dx =$$

$$= e^{-\frac{\xi^2}{4\gamma}} \int\limits_{-\infty - i\frac{\xi}{2\gamma}}^{+\infty - i\frac{\xi}{2\gamma}} e^{-z^2} dz = \sqrt{\frac{\pi}{\gamma}} e^{-\frac{\xi^2}{4\gamma}}$$

Отметим следующие свойства преобразования Фурье:

Утверждение 2.1.
1) $F[x^m f(x)](\xi) = -i\frac{\partial}{\partial\xi} \int x^{m-1} f(x) e^{i\xi x} dx = \cdots = (-i)^m \widetilde{f}^{(m)}(\xi)$*
2) $F[f^{(m)}(x)](\xi) = -\int f^{(m-1)}(x) \frac{\partial}{\partial x} e^{i\xi x} dx = \cdots = (-i\xi)^m \widetilde{f}(\xi)$
3) $F[f(x - x_0)](\xi) = \int f(y) e^{i\xi(y + x_0)} dy = e^{i\xi x_0} \widetilde{f}(\xi)$
4) $F[f(x) e^{i\xi_0 x}](\xi) = \int f(x) e^{i(\xi + \xi_0)x} dx = \widetilde{f}(\xi + \xi_0)$

*При интегрировании по частям внеинтегральные члены не появляются, т.к. предполагается убывание $f(x)$.

Замечание 2.1. *Из свойства 1) также вытекает, что если функция $f(x)$ убывает на ∞ со скоростью о$\left(\frac{1}{|x|^m}\right)$ (т.е. левая часть в 1) существует), то ее преобразование Фурье имеет m производных; аналогично, из 2) ясно, что преобразование Фурье $\widetilde{f}(\xi)$ убывает на ∞ тем быстрее, чем больше производных имеет оригинал $f(x)$ (сравните с поведением коэффициентов Фурье).*

Предположим теперь, что функция $\widetilde{f}(\xi)$, в свою очередь, допускает применение к ней преобразования Фурье.

Определение 2.2. Обратным преобразованием Фурье функции $\widetilde{f}(\xi)$ называется

$$F^{-1}[\widetilde{f}(\xi)](x) := \frac{1}{2\pi}F[\widetilde{f}(\xi)](-x) \equiv \frac{1}{2\pi}\int \widetilde{f}(\xi)e^{-i\xi x}d\xi \equiv \frac{1}{2\pi}F[\widetilde{f}(-\xi)](x)\,.$$

Теорема 2.1. $F^{-1}[\widetilde{f}(\xi)](x) = f(x)$

Доказательство этой теоремы фактически известно как "формула обращения" в теории рядов Фурье и здесь повторяться не будет. Переформулированная в виде $F^{-1}F = I$ (где I – тождественное преобразование) она называется свойством инволютивности преобразования Фурье. В сочетании с определением 2.2 можно также написать $F[\widetilde{f}] = 2\pi f(-x)$.

2.1.1 Преобразование Фурье классической свертки

Утверждение 2.2. *Преобразование Фурье свертки равно произведению преобразований Фурье:* $F[(f*g)(x)](\xi) = \widetilde{f}(\xi)\widetilde{g}(\xi)$

■ $F[(f*g)(x)](\xi) = \int\left(\int f(t)g(x-t)dt\right)e^{i\xi x}dx = \int f(t)dt\left(\int g(x-t)e^{i\xi x)}dx\right) = \int f(t)e^{i\xi t}dt \times$
$\times \int g(y)e^{i\xi y)}dx = \widetilde{f}(\xi)\widetilde{g}(\xi)\,.$ ■

2.1.2 Равенство Парсеваля

Утверждение 2.3. $\int |f(x)|^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\int\left|\widetilde{f}(\xi)\right|^2 d\xi\,.$

■ $\int |f(x)|^2\,dx = \int\left(\frac{1}{2\pi}\int \widetilde{f}(\xi)e^{-i\xi x}d\xi\right)\bar{f}(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int\left(\int \bar{f}(x)e^{-i\xi x}dx\right)\widetilde{f}(\xi)d\xi = \frac{1}{2\pi}\int|\widetilde{f}(\xi)|^2d\xi\,.$ ■

Замечание 2.2. *Если ввести норму функции $\|\phi\|^2 := \int|\phi(x)|^2dx$, то равенство Парсеваля можно переписать как $\frac{1}{2\pi}\|F\phi\| = \|\phi\|$, т.е. преобразование Фурье обладает свойством унитарности (с точностью до множителя $\frac{1}{2\pi}$).*

2.1.3 Соотношение неопределенности

Знаменитое неравенство квантовой механики, известное как соотношение неопределенности, также является одним из свойств преобразования Фурье.

Утверждение 2.4. $\int |xf(x)|^2dx\int|\xi\widetilde{f}(\xi)|^2d\xi \geqslant \frac{\pi}{2}\left(\int|f(x)|^2dx\right)^2$

■ Рассмотрим вспомогательную функцию $J(t) := \int |txf(x) + f'(x)|^2\, dx$ вещественного параметра t. Очевидно, $J(t)$ неотрицательный квадратичный трехчлен по t. Тем самым, его дискриминант не превосходит нуля, что и совпадает с соотношением неопределенности, если учесть соотношения

$$\int |f'(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int \left|\widetilde{(f')}(\xi)\right|^2 d\xi = \frac{1}{2\pi}\int |\xi\widetilde{f}(\xi)|^2 d\xi$$

и $\int \left(xf(x)\bar{f}'(x) + x\bar{f}(x)f'(x)\right) dx = -\int |f(x)|^2 dx\,.$ ■

2.2 ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ МЕДЛЕННОГО РОСТА

Начнем с наводящего соображения. Для регулярного функционала f его преобразование Фурье естественно задать как интеграл

$$(\widetilde{f}, \phi) = \int \left(\int f(x)e^{i\xi x}dx\right)\phi(\xi)d\xi = \int f(x)\left(\int \phi(\xi)e^{i\xi x}d\xi\right)dx = (f, \widetilde{\phi})\,.$$

Однако вовсе необязательно $\widetilde{\phi} \in \mathcal{K}$! Простой пример с финитной (хотя и не гладкой) функцией показывает, что преобразование Фурье может не быть финитным:

Пример 2.2. $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a \\ 0, & |x| > a \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \widetilde{f}(\xi) = 2\frac{\sin a\xi}{\xi}\,.$

Таким образом, невозможно определить преобразование Фурье для всех функционалов из $\mathcal{K}'$. Но оказывается возможным сделать это, сузив класс функционалов. Для этого необходимо рассматривать их над более широким пространством пробных функций (включающим в себя финитные как частный случай).

2.2.1 Пространство основных функций $\mathcal{S}$

Определение 2.3. Введем функциональное пространство $\mathcal{S}$, состоящее из функций $\phi(x)$, непрерывно дифференцируемых любое количество раз, $\phi \in C^\infty(-\infty, \infty)$, и таких, что $\forall\ k,\ l\ \ x^k\phi^{(l)}(x) \underset{|x|\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Функции из $\mathcal{S}$ будем теперь называть основными (пробными).

Простейший представитель функции из $\mathcal{S}$ – e^{-x^2}.

Очевидно, что $\mathcal{K} \subset \mathcal{S}$, т.к. любая финитная функция автоматически попадает в $\mathcal{S}$. Кроме того, *1)* $\mathcal{S}$ является линейным пространством; *2)* произведение функций из $\mathcal{S}$ – снова функция из $\mathcal{S}$; *3)* более того, в пространство $\mathcal{S}$ попадает и произведение $\phi \in \mathcal{S}$ на любую гладкую функцию функцию $h(x)$, которая на бесконечности растет, но не быстрее, чем степень, т.е. $\forall\ l\ |h^{(l)}(x)| \leqslant C_{lk}|x|^k$ при $|x| \to \infty$.

Определение 2.4. Последовательность функций $\phi_n(x)$ будет называться сходящейся к нулю в $\mathcal{S}$, $\phi_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{S}} 0$, если $x^k\phi_n^{(l)}(x) \rightrightarrows 0\ \ \forall\ k,\ l$. Соответственно, $\phi_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{S}} \phi(x)$, если $\phi_n(x) - \phi(x) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{S}} 0$.

Пример 2.3. $\frac{1}{n}e^{-x^2} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{S}} 0$.

Утверждение 2.5. *Пространство $\mathcal{K}$ плотно в $\mathcal{S}$ (пишем $\overline{\mathcal{K}} = \mathcal{S}$), т.е. $\forall\ \phi \in \mathcal{S}$ существует последовательность $\phi_n \in \mathcal{K}$, сходящаяся к ϕ в $\mathcal{S}$.*

■ Действительно, в качестве указанной последовательности всегда можно взять $\phi_n(x) = \phi(x)\eta\left(\frac{x}{n}\right)$, где $\eta(x)$ есть функция из $\mathcal{K}$, тождественно равная единице при $|x| < 1$. * Например,

$$\phi_n'(x) = \phi'(x)\eta\left(\frac{x}{n}\right) + \frac{1}{n}\phi(x)\eta'\left(\frac{x}{n}\right) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} \phi'(x)$$

и т.д. ■

2.2.2 Преобразование Фурье не выводит из $\mathcal{S}$

Обсудим в этом параграфе, что пробные функции из $\mathcal{S}$ обладают нужным нам свойством: $\widetilde{\phi} \in \mathcal{S}$.

■

1) Из оценки $|\phi(x)| \leqslant \frac{C}{x^2}$ при $|x| \to \infty$, где C – некоторая постоянная, вытекает сходимость интеграла $\int \phi(x)e^{i\xi x}dx$, т.е. существование $\widetilde{\phi}(\xi)\ \forall\ \phi \in \mathcal{S}$;

2) Существование производной любого порядка $\widetilde{\phi}^{(l)}(\xi)$ вытекает из возможности представить эту производную как $\widetilde{\phi}^{(l)}(\xi) = \int (ix)^l \phi(x)e^{i\xi x}dx$ и оценки $|\phi(x)| \leqslant \frac{C}{x^{l+2}}$;

3) Из свойства 2.1-1, вытекает, что $\xi^{k-1}\widetilde{\phi}(\xi) \underset{|\xi|\to\infty}{\longrightarrow} 0$ при любом k. По той же причине (в сочетании со свойством 2.1 -2) сказанное справедливо и для $\widetilde{\phi}^{(l)}(\xi)$. ■

Т.о., функция $\widetilde{\phi}(\xi)$ удовлетворяет всем критериям пробной функции из $\mathcal{S}$, т.е. $F[\mathcal{S}] \subseteq \mathcal{S}$. В действительности:

Утверждение 2.6. $F[\mathcal{S}] = \mathcal{S}$

■ Противное означало бы, что $\exists\ \phi_0 \in \mathcal{S}$, которая не может быть представлена как преобразование Фурье какой-либо функции из $\mathcal{S}$. Но $\phi_0 \equiv F^{-1}[\widetilde{\phi}_0(\xi)] = \frac{1}{2\pi}F[\widetilde{\phi}_0(-\xi)]$. ■

2.2.3 Пространство $\mathcal{S}'$ обобщенных функций медленного роста

Определение 2.5. Линейные непрерывные функционалы над $\mathcal{S}$ назовем обобщенными функциями медленного роста и обозначим их совокупность через $\mathcal{S}'$.

Очевидно, что $\mathcal{S}' \subset \mathcal{K}'$, поскольку функционал, определенный на финитных функциях, вовсе не обязан иметь также смысл на более широком классе убывающих функций.

Пример 2.4. *Классическая функция e^{x^2} порождает регулярный функционал из $\mathcal{K}'$, но не порождает регулярного функционала из $\mathcal{S}'$ (поскольку интеграл $\int e^{x^2}\phi(x)dx$ расходится $\forall\ \phi \in \mathcal{S}$).*

Однако регулярный функционал, порождаемый классической функцией x^m, попадает в $\mathcal{S}'$ при любом m.

Утверждение 2.7. *Если $f(x)$ – локально интегрируемая функция, удовлетворяющая при $|x| \to \infty$ оценке $|f(x)| \leqslant A|x|^m$, то $(f, \phi) = \int f(x)\phi(x)dx$ является линейным непрерывным функционалом.* *

---

*Такие функции называются "срезками", в данном случае — "срезка" на интервале $|x| < 1$.

*Из этого утверждения и предшествующего ему примера становится ясным термин "обобщенные функциями медленного роста".

■ По свойствам пробных функций $|\phi(x)| \leqslant \frac{C}{x^k}$, где в качестве k можно взять любое число. Возьмем $k = m + 2$, тогда $|f(x)\phi(x)| \leqslant \frac{C}{x^2}$, откуда и вытекает сходимость интеграла. Аналогичное рассуждение позволяет доказать и существование интегралов, в которых $\phi(x)$ заменена на $x^k\phi^{(l)}(x)$ при любых k, l, а также стремление этих интегралов к нулю, если $x^k\phi^{(l)}(x) \rightrightarrows 0$ ■

Легко убедиться в том, что $\delta,\ \mathcal{P}\frac{1}{x},\ \theta, \ldots \in \mathcal{S}'$. Кроме того, справедливо следующее утверждение:

Утверждение 2.8. *Если $f \in \mathcal{K}'$ — финитная функция, то $f \in \mathcal{S}'$, причем $\forall\ \phi \in \mathcal{S}$ $(f, \phi) := (f, \eta\phi)$, где "срезка" $\eta(x)$ есть функция из $\mathcal{K}$, тождественно равная единице в окрестности* $\operatorname{supp} f$.

■ Поскольку с очевидностью $\eta(x)\phi(x) \in \mathcal{K}$, то остается проверить, что выражение $(f, \eta\phi)$ не зависит от выбора "срезки" $\eta(x)$. Действительно, $(f, \eta_1\phi) - (f, \eta_2\phi) = (f, (\eta_1 - \eta_2)\phi) = 0$ для любой $\phi \in \mathcal{K}$, поскольку разность $\eta_1(x) - \eta_2(x) = 0$ в окрестности $\operatorname{supp} f$. ■

К функционалам из $\mathcal{S}'$ применимы все те понятия, которые рассматривались в предшествующей главе † (со сверткой дело обстоит даже несколько проще, поскольку определение сходимости в $\mathcal{S}$ не требует существования общего объемлющего носителя у всех функций последовательности).

2.3 ОБОБЩЕННОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Итак, теперь можно принять следующее

Определение 2.6. Преобразование Фурье $\widetilde{f}$ функционала $f \in \mathcal{S}'$ – это тоже функционал из $\mathcal{S}'$, действующий по правилу $(\widetilde{f}, \phi) = (f, \widetilde{\phi})$.

Пример 2.5. $\widetilde{\delta} = 1$. *Действительно,* $(\widetilde{\delta}, \phi) = (\delta, \widetilde{\phi}) = \widetilde{\phi}(0) = \int \phi(x)dx = (1, \phi)$.

Пример 2.6. $F[\delta(x+a) - \delta(x-a)] = -2i\sin(a\xi)$
(В дальнейшем у нас встретится важный 3-х мерный аналог этого примера).

Пример 2.7. $(F[\theta], \phi) = (\theta, \widetilde{\phi}) = \int\limits_0^\infty \left(\int \phi(\xi)e^{i\xi x}d\xi\right)dx$. *Переставить порядок интегрирования нельзя, поскольку интеграл по x разойдется. Однако можно продолжить выкладки под знаком предела:* $\cdots = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^\infty \left(\int \phi(\xi)e^{i(\xi+i\varepsilon)x}d\xi\right)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int \phi(\xi)\left(\int\limits_0^\infty e^{i(\xi+i\varepsilon)x}dx\right)d\xi = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int \frac{\phi(\xi)}{-i(\xi+i\varepsilon)}d\xi$. *Таким образом,* $F[\theta] = \frac{i}{\xi+i0}$.

Свойства 2.1 сохраняются и для обобщенного преобразования Фурье. Проверим, например, первое из них:
■ $(\frac{d}{d\xi}\widetilde{f}, \phi) = (\widetilde{f}, -\phi') = (f, -F[\phi']) = \left(f, (ix)\widetilde{\phi}\right) = \left((ix)f, \widetilde{\phi}\right) = (F[(ix)f], \phi)$, т.е. $\frac{d}{d\xi}\widetilde{f} = F[(ix)f]$. ■ Доказательство остальных пунктов в 2.1 проводится аналогичными рассуждениями.

Обратное обобщенное преобразование Фурье можно определить либо как $F^{-1}[\widetilde{f}(\xi)](x) := \frac{1}{2\pi}F[\widetilde{f}(\xi)](-x)$, либо как $F^{-1}[\widetilde{f}(\xi)](x) := \frac{1}{2\pi}F[\widetilde{f}(-\xi)](x)$. Эти определения эквивалентны (проверьте!).

†С той оговоркой, естественно, что умножать можно не на любые гладкие функции, а только на гладкие функции "медленного роста".

Утверждение 2.9. *Обобщенное преобразование Фурье инволютивно,* $FF^{-1}[f] = F^{-1}Ff = f$ *(и, следовательно,* $F^2[f] = 2\pi f(-x)$*).*

■ $(FF^{-1}[f], \phi) = \left(F^{-1}[f], \widetilde{\phi}\right) = \left(\frac{1}{2\pi}F[f](-\xi), \widetilde{\phi}\right) = \left(f, \frac{1}{2\pi}F[\widetilde{\phi}(-\xi)]\right) = (f, \phi)$. ■

Пример 2.8. *Имеем* $F^{-1}[1] = \delta$*. Но* $F^{-1}[1] = \frac{1}{2\pi}F[1] \;\Rightarrow\; F[1] = 2\pi\delta$*.*

Пример 2.9. *Найдем* $F[\mathcal{P}\frac{1}{x}]$*. Из примера 2.7 имеем, с использованием формул Сохоцкого 1.4.4,* $\mathcal{P}\frac{1}{x} = -i\widetilde{\theta} + i\pi\delta \;\Rightarrow\; F[\mathcal{P}\frac{1}{x}] = -2\pi i\theta(-\xi) + i\pi = i\pi\mathrm{sign}(\xi)$.

Пример 2.10. *Подействовав левой и правой частью формулы Пуассона 1.2.4 на пробную функцию* ϕ*, можно переписать эту формулу так:* $\sum\limits_k \phi(2\pi k) = \frac{1}{2\pi}\sum\limits_k \widetilde{\phi}(k)$*.*

Выше уже отмечалось, что, чем (классическая) функция быстрее убывает на ∞, тем более гладким является ее преобразование Фурье. Оказывается, что имеет место следующая

Теорема 2.2. *Если* $f \in \mathcal{K}'$ *— финитная обобщенная функция, то* $F[f] \in C^\infty$*, причем* $F[f](\xi) = \left(f, \eta(x)e^{i\xi x}\right)$*, где* $\eta(x) \in \mathcal{K}$ *равна единице в окрестности* $\mathrm{supp}\, f$*.*

Обобщенное равенство Парсеваля

■ $(f, \phi) = (f, FF^{-1}[\phi]) = \left(\widetilde{f}, F^{-1}[\phi]\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\widetilde{f}(\xi), \widetilde{\phi}(-\xi)\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\widetilde{f}(\xi), \overline{\widetilde{\phi}(\xi)}\right)$. ■ В частности, при $f = \phi$ это – классическое равенство Парсеваля.

Обобщенное преобразование Фурье свертки

Следует сразу оговориться, что, поскольку в правой части формулы мы ожидаем произведение преобразований Фурье, то один из множителей должен быть классической и гладкой функцией (и притом “медленного роста”). Этого можно добиться, например, при следующих (для простоты)* предположениях:

Утверждение 2.10. *Пусть* $f \in \mathcal{S}'$*,* $g \in \mathcal{S}$*. Тогда* $F[f * g] = \widetilde{f}\widetilde{g}$*.*

■ $(F[f * g], \phi) = (f * g, \widetilde{\phi}) = \left(f, (g, \widetilde{\phi}(x + y))\right)$. Во внутренних скобках - действие регулярного функционала g на классическое преобразование Фурье. Поэтому $(g, \widetilde{\phi}(x + y)) = \int g(y)dy \int e^{i\xi(x+y)}\phi(\xi)d\xi = \int \phi(\xi)e^{i\xi x}\left(\int e^{i\xi y}g(y)dy\right)d\xi = F[\phi\widetilde{g}]$. Продолжая начатую цепочку равенств, получаем: ... $= (f, F[\phi\widetilde{g}]) = (\widetilde{f}, \phi\widetilde{g}) = (\widetilde{f}\widetilde{g}, \phi)$. ■

2.4 МЕТОД ФУРЬЕ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В этом разделе мы рассмотрим построение методом Фурье фундаментального решения дифференциального оператора с постоянными коэффициентами.

*В силу теоремы 2.2 утверждение остается верным и в случае финитной $g \in \mathcal{K}'$.

Итак, надо найти решение, удовлетворяющее уравнению $\mathcal{L}\mathcal{E} = \delta$, где $\mathcal{L} = \sum\limits_{k=0}^{n} p_k \frac{d^k}{dx^k}$, p_k – постоянные числа. Применим к обеим частям уравнения преобразование Фурье. Получим $L(-i\xi)\widetilde{\mathcal{E}} = 1$, где $L(\lambda)$ – полином $L(\lambda) := \sum\limits_{k=0}^{n} p_k \lambda^k$.

Запишем временно решение уравнения $L(-i\xi)\widetilde{\mathcal{E}} = 1$ как

$$\widetilde{\mathcal{E}} = \tfrac{1}{L(-i\xi)} + \text{общее решение однородного уравнения},$$

где первое слагаемое – какое либо частное решение. Зная $\widetilde{\mathcal{E}}$, мы можем найти $\mathcal{E}$ путем применения обратного преобразования Фурье.

Обсудим некоторые детали. Во-первых, упомянутое в предыдущей строке общее решение однородного уравнения – это сумма (с произвольными коэффициентами) δ-функций, сосредоточенных в корнях полинома $L(-i\xi)$ (в случае кратных корней в эту сумму входят и производные δ-функций, см. раздел *1.3.2*). Поэтому обратное преобразование Фурье от общего решения однородного уравнения приведет к сумме (с произвольными коэффициентами) экспонент вида $e^{i\xi_m x}$, ξ_m – корни полинома $L(-i\xi)$ (в случае кратных корней – к слагаемым вида $x^n e^{i\xi_m x}$). Таким образом, общее решение однородного *алгебраического уравнения* $L(-i\xi)\widetilde{y} = 0$ и общее решение однородного *дифференциального уравнения* $\mathcal{L}y = 0$ связаны преобразованием Фурье.

Во-вторых, необходимо придать четкий смысл функционалу $\frac{1}{L(-i\xi)}$, выражающему частное решение уравнения $L(-i\xi)\widetilde{y} = 1$. При отсутствии у полинома $L(-i\xi)$ вещественных корней выражение $\frac{1}{L(-i\xi)}$ является гладкой функцией на вещественной оси (кавычки попросту не нужны), и обратное преобразование Фурье от этого слагаемого следует понимать как классическое (при этом интеграл, как правило, удается вычислить с помощью вычетов). При наличии же вещественных корней у $L(-i\xi)$ (пусть ξ_j – один из таких корней кратности n_j) выражение $\frac{1}{L(-i\xi)}$ следует разбить в сумму простых дробей. Те дроби, знаменатели которых не обращаются в ноль на вещественной оси, обрабатываются, как сказано выше. Что же касается слагаемых вида $\frac{1}{(\xi-\xi_j)^{n_i}}$, $n_i \leqslant n_j$, то их можно понимать как *любую* из регуляризаций целочисленных степенных особенностей (см. раздел *1.4.3*). Например, в качестве такой регуляризации можно взять функционалы $\mathcal{P}\frac{1}{(\xi-\xi_j)^{n_i}}$. *

Пример 2.11. *Рассмотрим два оператора* $\mathcal{L} = -\frac{d^2}{dx^2} \pm a^2$. *Преобразованием Фурье получаем (для фундаментального решения)* $(\xi^2 \pm a^2)\widetilde{\mathcal{E}} = 1$. *В случае знака "+" имеем* $\widetilde{\mathcal{E}}(\xi) = \frac{1}{\xi^2+a^2} + C_1\delta(\xi - ia) + C_2\delta(\xi + ia) \;\;\Rightarrow\;\; \mathcal{E}(x) = \frac{1}{2\pi}\int \frac{e^{-i\xi x}}{\xi^2+a^2}d\xi + \frac{1}{2\pi}C_1 e^{ax} + \frac{1}{2\pi}C_2 e^{-ax}$ *(в дальнейшем общее решение однородного уравнения опускаем). Вычисляя интеграл, находим* $\mathcal{E}(x) = \frac{e^{-a|x|}}{2a}$. *В случае же знака "-" у нас* $\widetilde{\mathcal{E}}(\xi) = \frac{1}{2a}\left(\mathcal{P}\frac{1}{\xi-a} - \mathcal{P}\frac{1}{\xi+a}\right) \Rightarrow$ *(см. пример 2.9)* $\mathcal{E}(x) = \frac{i}{4}\left(-\mathrm{sign}(x)e^{-iax} + \mathrm{sign}(x)e^{iax}\right) = \frac{1}{2a}\sin(ax)\mathrm{sign}(x)$.

Пример 2.12. *Попробуем решить методом Фурье очень простое уравнение* $y' = 1$. *После преобразования Фурье получаем* $-i\xi\widetilde{y} = 2\pi\delta(\xi)$. *Найти частное решение делением на* ξ *в данном случае нельзя, поскольку обобщенную функцию* $\delta(\xi)$ *можно умножать <u>только</u> на гладкие функции. Таким образом, применение метода Фурье наталкивается*

*Напомним, что регуляризации могут различаться на общее решение однородного уравнения $L(-i\xi)\widetilde{y} = 0$ и, следовательно, приводят к изменению фундаментального решения на общее решение исходного дифференциального уравнения.

здесь на трудности (причина которых в том, что правая часть исходного уравнения не убывает на ∞). Однако в силу простоты задачи эти трудности, конечно, обходятся. Действительно, легко проверить, что общим решением уравнения $-i\xi\widetilde{y} = 2\pi\delta(\xi)$ является $\widetilde{y}(\xi) = C\delta(\xi) + \frac{2\pi}{i}\delta'(\xi) \Rightarrow y(x) = \frac{C}{2\pi} + x$.

Пример 2.13. *Построим фундаментальные решения уравнения $xy' + (1-\lambda)y = \delta(x)$. После преобразования Фурье имеем $\xi\widetilde{y}' + \lambda\widetilde{y} = -1$. Нетрудно увидеть частное решение этого уравнения: $\widetilde{y}_* = -1/\lambda$, если $\lambda \neq 0$, и $\widetilde{y}_*' = -\mathcal{P}\frac{1}{\xi}$ в противном случае. Что же касается общего решения соответствующего однородного уравнения, то мы видели (см. пример 1.13), что у этого уравнения могут быть и обобщенные решения. Ограничимся в дальнейшем случаем целых неотрицательных λ, при которых эти новые решения выглядят сравнительно просто.*

Итак, пусть $\lambda = m \in \mathbb{Z}$, $m \geqslant 0$. При $m = 0$ имеем $\widetilde{y}'(\xi) = -\mathcal{P}\frac{1}{\xi} + \widetilde{C}_1\delta(\xi)$. Чтобы найти $y(x)$, проще всего применить вторично прямое преобразование Фурье к предыдущему равенству. Получим $xy(x) = \mathrm{sign}(x)/2 + C_1 \Rightarrow y(x) = C_1\mathcal{P}\frac{1}{x} + C_2\delta(x) + y_*(x)$, где y_* — функционал, являющийся частным решением уравнения $xy(x) = \mathrm{sign}(x)/2$. Поскольку $(\mathrm{sign}(x), \phi) = \int\limits_0^\infty [\phi(x) - \phi(-x)]\,dx$, то в качестве y_* подойдет

$$(y_*, \phi) = \frac{1}{2}\int\limits_0^R \frac{\phi(x) + \phi(-x) - 2\phi(0)}{x}dx$$

.

Пусть теперь $m \neq 0$. Тогда $\widetilde{y} = -\frac{1}{m} + \widetilde{C}_1\mathcal{P}\frac{1}{\xi^m} + \widetilde{C}_2\delta^{(m)}(\xi)$ (здесь первое слагаемое — указанное выше частное решение, второе слагаемое — регуляризация классического Эйлеровского решения, а третье слагаемое — новое обобщенное решение, полученное в примере 1.13). Окончательно: $y(x) = -\frac{1}{m}\delta(x) + C_1x^{m-1}\mathrm{sign}(x) + C_2x^m$.

ГЛАВА 3

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

3.1 ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Основные (пробные) функции многих переменных - это функции, имеющие в $\mathbb{R}^n$ всевозможные непрерывные частные производные любых порядков и финитные (по всем направлениям). Примером такой функции, как и в одномерном случае, является

$$\phi(\vec{x}) = \begin{cases} 0, & |\vec{x}| \geqslant a \\ \exp -\frac{a^2}{a^2-|\vec{x}|^2}, & |\vec{x}| < a \end{cases} ;$$

произведение вида $\phi_1(x)\phi_2(y)$, где $\phi_{1,2}$ — одномерные основные функции, очевидно является двумерной основной. Аналогично вводится и пространство $\mathcal{S}$ многомерных функций.

Введение функционалов, определенных над пространством основных функций многих переменных, не вызывает затруднений и производится вполне аналогично. Столь же естественно переносятся на многомерный случай все понятия и свойства, связанные с обобщенными функциями. Отметим лишь некоторые из них.

1) Обобщенные частные производные определяются как

$$\left(\frac{\partial^{|m|}}{\partial x_1^{m_1}\dots\partial x_n^{m_n}} f, \phi\right) = \left(f, (-1)^{|m|}\frac{\partial^{|m|}}{\partial x_1^{m_1}\dots\partial x_n^{m_n}}\phi\right) ,$$

где $|m| = m_1 + \dots + m_n$.

2) Обобщенная функция $f(A\vec{x})$, где A - невырожденная ($\det(A) \neq 0$) матрица, по определению есть

$$(f(A\vec{x}), \phi) = \left(f(\vec{x}), \frac{1}{|\det(A)|}\,\phi(A^{-1}\vec{x})\right) .$$

В частности, $\delta(\lambda\vec{x}) = \frac{1}{|\lambda|^n}\delta(\vec{x})$ (говорят, что δ-функция в n-мерном пространстве является однородной $-n$-ой степени), а также $\delta(A\vec{x}) = \delta(\vec{x})$, если $\det(A) = \pm 1$ (что следует назвать инвариантностью δ-функции относительно ортогональных преобразований)

3) Классическое многомерное преобразование Фурье и классическая свертка вводятся, соответственно, как пространственные интегралы:

$$F[\phi](\vec{\xi}) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(\vec{x})e^{i\langle\vec{x},\vec{\xi}\rangle}d\vec{x}\,, \quad (\phi * \psi)(\vec{\xi}) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(\vec{x})\psi(\vec{\xi}-\vec{x})d\vec{x}\,,$$

где $\left\langle\vec{x},\vec{\xi}\right\rangle$ означает скалярное произведение многомерных векторов. Свойства одномерных аналогов этих операций переносятся на многомерный случай в полном объеме, только теперь дифференцирование является частным, например:

$$F[x_1^{m_1}\dots x_n^{m_n} f(\vec{x})] = (-i)^{|m|}\frac{\partial^{|m|}}{\partial\xi_1^{m_1}\dots\partial\xi_n^{m_n}}\widetilde{f}(\vec{\xi})\,.$$

Обратное преобразование Фурье есть $F^{-1}[f(\vec{x})](\vec{\xi}) := \frac{1}{(2\pi)^3}F[f(-\vec{x})](\vec{\xi}) = \frac{1}{(2\pi)^3}F[f(\vec{x})](-\vec{\xi})$.

В дальнейшем мы будем использовать обозначения $r = |\vec{x}|$ и $\xi = |\vec{\xi}|$.

4) Обобщенные решения дифференциальных уравнений в частных производных определяются, как и в одномерном случае, при помощи интегрального тождества (см. определение 1.26). С целью избежать громоздкого обсуждения конструкции оператора, сопряженного к произвольному дифференциальному оператору в частных производных, ограничимся лишь некоторыми важными для дальнейшего примерами.

Пример 3.1.

1. *Оператор Лапласа:* $\mathcal{L} := \Delta = \sum\limits_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \Rightarrow \mathcal{L}^* = \Delta$

   (Применим для функций ϕ, ψ из пространства S формулу Грина (см. параграф 4.3.1) к многомерному шару достаточно большого радиуса; поскольку функции из пространства S быстро убывают вместе со всеми производными, поверхностный интеграл стремится к нулю при увеличении радиуса шара, и в пределе остается $\int_{\mathbb{R}^n}\Delta\phi\,\psi d\vec{x} = \int_{\mathbb{R}^n}\phi\,\Delta\psi d\vec{x}$.)

2. *Оператор Гельмгольца:* $\mathcal{L} := \Delta + k^2 \Rightarrow \mathcal{L}^* = \Delta + k^2$

3. *Волновой оператор (Даламбера):* $\mathcal{L} := \Box_a = \Delta - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Rightarrow \mathcal{L}^* = \Box_a$

   (К интегралу $\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt\int_{\mathbb{R}^n}\Box_a\phi\,\psi d\vec{x}$ применяем формулу Грина по $\vec{x}$ и интегрирование по частям по t.)

4. *Оператор теплопроводности:*
   $\mathcal{L} := \Delta - \frac{1}{a^2}\frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow \mathcal{L}^* = \Delta + \frac{1}{a^2}\frac{\partial}{\partial t}$

3.1.1 Прямое произведение обобщенных функций

Как указывалось, обобщенные функции перемножать нельзя. Однако можно перемножать обобщенные функции разных переменных, при этом результатом является обобщенная функция двух переменных, называемая прямым произведением.

Наводящие соображения (ограничиваемся двумерным случаем): для регулярных функционалов

$$\int\int f(x)g(y)\phi(x,y)dxdy = \int f(x)dx\int g(y)\phi(x,y)dy\,.$$

Поэтому естественно принять

Определение 3.1. (прямого произведения): $(f(x)\cdot g(y),\phi) := (f(x),(g(y),\phi(x,y)))$.*

*Запись $(g(y),\phi(x,y))$ означает, что функционал g действует на $\phi(x,y)$ как на функцию y, при этом результат действия зависит от x как от параметра.

Однако для того, чтобы данное определение было корректным, необходимо убедиться в том, что действие функционала $g(y)$ на функцию $\phi(x,y)$, параметрически зависящее от x, как функция x является основной. Финитность — очевидна, т.к. при достаточно больших x $\phi(x,y)\equiv 0$ (эта функция финитна по всем направлениям). Возможность дифференцировать $(g(y),\phi(x,y))$ по x любое число раз вытекает из непрерывности функционала g и гладкости функции ϕ:

$$\frac{d}{dx}\left(g(y),\phi(x,y)\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(g(y),\frac{\phi(x+\Delta x,y)-\phi(x,y)}{\Delta x}\right)=\left(g(y),\frac{\partial}{\partial x}\phi(x,y)\right).$$

Кроме того, необходимо проверить непрерывность функционала $f(x)\centerdot g(y)$ (линейность очевидна). Доказательство этого обстоятельства вполне аналогично доказательству непрерывности функционала, определяющего свертку обобщенных функций (см. раздел *1.5.1*).

Пример 3.2.

$$(\delta(x)\delta(y),\phi(x,y))=(\delta(x),(\delta(y),\phi(x,y)))=(\delta(x),\phi(x,0))=\phi(0,0)=(\delta(x,y),\phi(x,y)),$$

т.е. $\delta(x)\delta(y)=\delta(x,y)$.

Прямое произведение обладает следующими свойствами:

Утверждение 3.1. *1)* $f(x)\centerdot g(y)=g(y)\centerdot f(x)$;
2 $(f(x)\centerdot g(y))\centerdot h(z)=f(x)\centerdot(g(y)\centerdot h(z))$
3) $\frac{\partial}{\partial x}(f(x)\centerdot g(y))=f'(x)\centerdot g(y)$;
4) $\operatorname{supp} f(x)\centerdot g(y)=\operatorname{supp} f(x)\times\operatorname{supp} g(y)$

Доказательства свойств *1)—2)* также аналогичны соответствующим доказательствам, приведенным для свертки в разделе *1.5.1*. Докажем *3)—4)*:

■ *3)* $\left(\frac{\partial}{\partial x}(f\centerdot g),\phi\right)=\left(f\centerdot g,-\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)=\left(f,(g,-\frac{\partial\phi}{\partial x})\right)=\left(f,-\frac{\partial}{\partial x}(g,\phi)\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial x},(g,\phi)\right)=(f'\centerdot g,\phi)$.

4) Если $x_0\notin\operatorname{supp} f$, то $(f\centerdot g,\phi)=(g\centerdot f,\phi)=(g,(f,\phi))=0$ для любой функции ϕ, отличной от нуля лишь в некоторой окрестности точки x_0, т.е. $x_0\notin\operatorname{supp} f\centerdot g$. Аналогично: $y_0\notin\operatorname{supp} g\Rightarrow y_0\notin\operatorname{supp} f\centerdot g$. Т.о. $\operatorname{supp} f(x)\centerdot g(y)\subseteq\operatorname{supp} f(x)\times\operatorname{supp} g(y)$. С другой стороны, если $(x_0,y_0)\in\operatorname{supp} f(x)\times\operatorname{supp} g(y)$, то $(f,\phi)\neq 0$ ($(g,\psi)\neq 0$) на пробных функциях $\phi(x)$ ($\psi(y)$), отличных от нуля в некоторой окрестности x_0 (y_0), и, следовательно, $(f(x)\centerdot g(y),\phi(x)\psi(y))=(f,\phi)(g,\psi)\neq 0$, т.е.$\operatorname{supp} f(x)\centerdot g(y)\supseteq\operatorname{supp} f(x)\times\operatorname{supp} g(y)$. ■

3.1.2 δ-функция на сфере и ее преобразование Фурье

В многомерном пространстве появляется возможность вводить распределения, сосредоточенные на многообразиях меньшей размерности. Рассмотрим одно из таких определений.

Определение 3.2. δ-функцией на сфере (в трехмерном пространстве) назовем следующий функционал: $(\delta_{S_R},\phi)=\int\limits_{S_R}\phi(\vec{x})ds$, где S_R - сфера $|\vec{x}|=R$.

Упражнение 3.1. *Докажите, что* δ_{S_R} *сосредоточена на сфере* S_R *(т.е.* $\operatorname{supp}\delta_{S_R}=S_R$*).*

δ-функцию на сфере с центром в точке $\vec{x}_0$ (пишем $S_R(\vec{x}_0)=\{\vec{x}:|\vec{x}-\vec{x}_0|=R\}$) будем обозначать как $\delta_{S_R}(\vec{x}-\vec{x}_0)$.

Утверждение 3.2. $F\left[\delta_{S_R}(\vec{x})\right] = 4\pi R\frac{\sin R\xi}{\xi}$.

■ $\left(F\left[\delta_{S_R}(\vec{x})\right], \phi(\vec{\xi})\right) = \left(\delta_{S_R}(\vec{x}), \widetilde{\phi}(\vec{x})\right) = \int\limits_{S_R} \widetilde{\phi}(\vec{x})\, dS_{\vec{x}} = \int\limits_{S_R} dS_{\vec{x}} \int e^{-i<\vec{\xi},\vec{x}>} \phi(\vec{\xi}) d\vec{\xi} =$
$= \int \phi(\vec{\xi}) d\vec{\xi} \int\limits_{S_R} e^{-i<\vec{\xi},\vec{x}>}\, dS_{\vec{x}}$. Для вычисления внутреннего интеграла перейдем к сферическим переменным в пространстве $\{\vec{x}\}$: $\int\limits_{S_R} e^{-i<\vec{\xi},\vec{x}>}\, dS_{\vec{x}} = R^2 \int\limits_0^{\pi} d\vartheta e^{-iR\xi\cos\vartheta} \sin\vartheta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi R\frac{\sin R\xi}{\xi}$. ■

3.2 ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ

3.2.1 Фундаментальное решение волнового уравнения в $\mathbb{R}^1$

Рассмотрим (в любой размерности) уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta\right)\mathcal{E}(\vec{x},t) = \delta(\vec{x},t)$$

и применим к нему (многомерное) преобразование Фурье по переменным $\vec{x}$. Очевидно, это преобразование перестановочно с $\frac{\partial}{\partial t}$. Кроме того, $F_{\vec{x}}[\delta(\vec{x},t)] = F_{\vec{x}}[\delta(\vec{x})\delta(t)] = \delta(t)$. Поэтому после преобразования получаем

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + a^2\xi^2\right)\mathcal{E}(\vec{\xi},t) = \delta(t)\,.$$

Таким образом, задача сведена к построению фундаментального решения для одномерного дифференциального оператора, решение которой известно и дается формулой

$$\widetilde{\mathcal{E}}(\vec{\xi},t) = \frac{\sin(a\xi t)}{a\xi}\theta(t) \tag{3.1}$$

(с точностью до решения однородного уравнения - из всевозможных фундаментальных решений мы фиксируем то (единственное), которое равно нулю при отрицательных t; выше такое фундаментальное решение обозначалось индексом "+“). Вычисление обратного преобразования Фурье выполняется по-разному, в зависимости от размерности пространства.

В $\mathbb{R}^1$ имеем $\mathcal{E}(x,t) = \theta(t)\frac{1}{2\pi}\int e^{-i\xi x}\frac{\sin(a\xi t)}{a\xi}d\xi$. Вычисление данного интеграла возможно при помощи теории вычетов: $\dots = \frac{1}{4a}\theta(t)\left(\mathrm{sign}(x+at) + \mathrm{sign}(x-at)\right) = \frac{1}{2a}\theta(t)\theta(at-|x|)$.

Замечание 3.1. *Здесь (и далее) мы формально записываем ответ в виде произведения $\theta(t)$ на другую (негладкую, или даже обобщенную функцию) от $(\vec{x},t)$. Такую запись следует понимать просто как $\mathcal{E}(\vec{x},t)\big|_{t<0} = 0$.*

Замечание 3.2. *Полученный ответ отличен от нуля только в секторе $\{t>0; -at < x < at\}$, называемым “световым конусом”. Таким образом (это важно для дальнейшего), полученное фундаментальное решение полуфинитно по t и финитно по x.*

3.2.2 Фундаментальное решение волнового уравнения в $\mathbb{R}^2$ *и* $\mathbb{R}^3$

Оказывается, что обращение формулы (3.1) в двумерном пространстве оказывается гораздо более сложной задачей, чем в трехмерном. Поэтому приводим соответствующую формулу без доказательства:

Теорема 3.1. *Фундаментальным решением волнового уравнения в* $\mathbb{R}^2$ *является* $\mathcal{E}(\vec{x},t) = \theta(t)\frac{1}{2\pi a}\frac{\theta(at-r)}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}$

Видим, что и в двумерном случае фундаментальное решение обладает теми же свойствами финитности, что и в одномерном случае: оно отлично от нуля только внутри круга $\{t > 0; r < at\}$.

Для вычисления фундаментального решения в трехмерном пространстве, воспользовавшись инволютивностью преобразования Фурье и утверждением 3.2 , получаем:

$$\mathcal{E}(\vec{x},t) = \theta(t)\frac{1}{4\pi a^2 t}\delta_{S_{at}}(\vec{x})\,.$$

Данное фундаментальное решение отлично от нуля только на сфере $\{|\vec{x}| = at\,,\ t > 0\}$ и тем самым также является полуфинитным по t и финитным по x. Однако в отличие от одно- и двумерного случаев возмущение, порожденное точечным и мгновенным источником, распространяясь в пространстве, не оставляет о себе "памяти" (более подробно о распространении волн говорится в параграфе *5.1.2*).

3.2.3 Фундаментальное решение уравнения теплопроводности

Рассмотрим уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - a^2\Delta\right)\mathcal{E}(\vec{x},t) = \delta(\vec{x},t)\,. \tag{3.2}$$

Аналогично, применяя преобразование Фурье по $\vec{x}$, приходим к одномерной задаче $\widetilde{\mathcal{E}}'(\vec{\xi},t) + a^2\xi^2\widetilde{\mathcal{E}}(\vec{\xi},t) = \delta(t) \;\Rightarrow\; \widetilde{\mathcal{E}}(\vec{\xi},t) = \theta(t)e^{-a^2\xi^2 t}$. Для вычисления обратного преобразования Фурье $\mathcal{E}(\vec{x},t) = \frac{\theta(t)}{2\pi}\int e^{-i<\vec{\xi},\vec{x}>-a^2\xi^2 t}d\vec{\xi}$ заметим, что этот интеграл распадается в произведение (одинаковых) однократных интегралов, каждый из которых вычисляется так же, как и в примере 2.1. В результате:

$$\mathcal{E}(\vec{x},t) = \frac{\theta(t)}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n}e^{-\frac{r^2}{4a^2t}}\,,$$

где n – размерность пространства.

Физический смысл полученной формулы состоит в следующем (эффект диффузии): отклик системы, описываемой уравнением теплопроводности, на точечное и мгновенное возмущение проявляется в "расплывании" этого возмущения с течением времени.

3.2.4 Фундаментальное решение уравнения Лапласа в $\mathbb{R}^3$

Фундаментальное решение оператора Лапласа определяется следующим уравнением:

$$\Delta\mathcal{E}(\vec{x}) = \delta(\vec{x})\,.$$

Рассмотрим это уравнение в $\mathbb{R}^3$. Для его решения применим многомерное преобразование Фурье по всем координатам. Получаем $-\xi^2\widetilde{\mathcal{E}}(\vec{\xi}) = 1$. Отметим, что в трехмерном пространстве функция $\frac{1}{\xi^2}$ имеет в нуле интегрируемую особенность. Обратное преобразование Фурье может пониматься как классическое, $\mathcal{E}(\vec{x}) = \frac{1}{8\pi^3}\int\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{e^{-i<\vec{\xi},\vec{x}>}}{\xi^2}d\vec{\xi}$, поскольку на бесконечности написанный интеграл также сходится (правда, всего лишь условно), в чем мы и убедимся путем его вычисления. С этой целью перейдем в пространстве $\{\vec{\xi}\}$ к сферическим координатам, совместив азимутальную ось с направлением вектора $\vec{x}$. Тогда $<\vec{\xi},\vec{x}>= \xi r\cos\vartheta$ и

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{8\pi^3}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\infty}d\xi\int\limits_0^{\pi}e^{-i\xi r\cos\vartheta}d\vartheta = -\frac{1}{2\pi^2 r}\int\limits_0^{\infty}\frac{\sin(\xi r)}{\xi}d\xi = -\frac{1}{4\pi r}\,.$$

Отметим без обсуждения, что фундаментальным решением оператора Лапласа в $\mathbb{R}^2$ является функция $\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}$.

3.2.5 Фундаментальное решение уравнения Гельмгольца в $\mathbb{R}^3$

Требуется построить решение, удовлетворяющее уравнению

$$\Delta\mathcal{E}(\vec{x}) + k^2\mathcal{E}(\vec{x}) = \delta(\vec{x})\,. \tag{3.3}$$

Как и в предыдущем разделе, это решение можно построить методом Фурье. Применим здесь, однако, другой способ, а именно, непосредственной подстановкой проверим, что:

Утверждение 3.3. *Уравнению (3.3) удовлетворяют функции* $\mathcal{E} = -\frac{e^{\pm ikr}}{4\pi r}$

■ Действительно, $\Delta\mathcal{E} = e^{\pm ikr}\Delta\left(-\frac{1}{4\pi r}\right) + 2\left\langle\nabla e^{\pm ikr}, \nabla\left(-\frac{1}{4\pi r}\right)\right\rangle + \left(-\frac{1}{4\pi r}\right)\Delta e^{\pm ikr}$. Поскольку $-\frac{1}{4\pi r}$ является фундаментальным решением оператора Лапласа, то первое слагаемое в этой формуле дает δ-функцию. Непосредственное вычисление оставшихся двух слагаемых показывает, что их сумма сокращает член $k^2\left(-\frac{e^{\pm ikr}}{4\pi r}\right)$ в уравнении. ■

Замечание 3.3. *Функции* $-\frac{e^{\pm ikr}}{4\pi r}$ *носят названия сферических волн. Физический смысл этих решений – это возмущения, распространяющееся от точечного источника (знак* $+$*), или к источнику (знак* $-$*). При этом волновой фронт возмущения (т.е. поверхность постоянной фазы) - это сфера.*

Фундаментальными решениями оператора Гельмгольца в $\mathbb{R}^2$ являются $\frac{i}{4}\mathcal{H}_0^{(1,2)}(kr)$, где $\mathcal{H}_0^{(1,2)}(z)$ – функции Ханкеля 1-го и 2-го рода. При больших r они ведут себя подобно сферическим волнам, волновые фронты которых – окружности. В связи с этим данные решения получили название цилиндрических волн.

ГЛАВА 4

ПОСТАНОВКА И КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ (КРАТКИЙ ОБЗОР)

Целью настоящей главы является краткий обзор постановки краевых и начальных задач для линейных уравнений второго порядка в частных производных, наиболее часто встречающихся при описании физических процессов. Изложение не претендует на полноту.

4.1 КЛАССИФИКАЦИЯ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Предметом исследования является уравнение вида

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x)\, u_{x_j x_k} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)\, u_{x_j} + c(x) = f(x)\,, \quad u_{x_j x_k} := \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k}\,, \quad u_{x_j} := \frac{\partial u}{\partial x_j}\,, \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{4.1}$$

с вещественными коэффициентами. Матрица $\|a_{jk}(x)\|$ коэффициентов при старших производных должна также считаться симметричной. Установим, к каким простейшим формам может быть приведено данное уравнение линейной ортогональной заменой переменных. Пусть $P = \|p_{lm}\|$ – матрица такой замены, т.е. $y = Px$. Из соотношения $u_{x_j x_k} = \sum\limits_{l,m=1}^{n} p_{lj} p_{mk} u_{y_l y_m}$ ясно, что *в каждой точке* x матрица коэффициентов преобразуется как $\|a_{jk}(x)\| \Rrightarrow P\|a_{jk}(y)\|P^T = P\|a_{jk}(y)\|P^{-1}$. Как известно, преобразованием подобия симметричная матрица может быть приведена к диагональному виду. В результате уравнение (4.1) переходит в

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j(y)\, u_{y_j^2} + \dots = 0\,,$$

где многоточием обозначены слагаемые, не содержащие производные второго порядка.

Принято выделять следующие случаи:

- *Эллиптические уравнения* – все $\lambda_j(y) \neq 0$ и одного знака;
- *Гиперболические уравнения* – все $\lambda_j(y) \neq 0$, но одно из них противоположно по знаку всем остальным;
- *Параболические уравнения* – одно из $\lambda_j(y)$ равно нулю, все остальные одного знака. *

*Выделенные переменные в гиперболическом и параболическом случаях обычно называют временем.

Приведенная классификация обусловлена тем, что поведение решений трех перечисленных типов уравнений кардинально отличаются по своим физическим свойствам. Разумеется, эта классификация не охватывает всех возможных случаев и является локальной, т.е., вообще говоря, может меняться от точки к точке.

Пример 4.1. $\Delta u = f(x)$ *(уравнение Пуассона) – эллиптическое;*
$u_{tt} - a^2\Delta u = f(x)$ *(волновое уравнение) – гиперболическое;*
$u_t - a^2\Delta u = f(x)$ *(уравнение теплопроводности) – параболическое;*
$u_{\xi\tau} + \cdots = f(\xi, \tau)$ *– гиперболическое;**
$iu_t = a^2\Delta u + Q(x)u$ *(уравнение Шредингера) – не принадлежит ни к одному из вышеуказанных типов;*
$u_{xx} + xu_{yy} = 0$ *(уравнение Трикоми) – уравнение переменного типа;*

4.2 КРАЕВЫЕ И НАЧАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ; КОРРЕКТНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Уравнения в частных производных допускают богатый произвол в решениях - общие решения зависят от произвольных функций (а не только от произвольных постоянных, как в случае обыкновенных дифференциальных уравнений).

Пример 4.2. *Общее решение уравнения* $u_{xy} = 0$ *есть* $u(x, y) = \phi(x) + \psi(y)$*, где* $\phi(x)$ *и* $\psi(y)$ *– произвольные гладкие функции.*

Поэтому для выделения единственного решения уравнение должно быть снабжено дополнительными условиями. Уравнение с дополнительными условиями к нему носит название **задачи**. В математической физике наиболее часто встречаются следующие способы постановки задач:

Определение 4.1. **Краевая задача для эллиптических уравнений** состоит в определении функции $u(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющей в области D (внутренняя задача) или вне области D (внешняя задача) данному уравнению, а на границе S области D – одному из следующих *краевых условий*:

Условию Дирихле, или условию первого рода: $u\big|_S = \phi(x)$

Условию Неймана, или условию второго рода: $\frac{\partial u}{\partial n}\big|_S = \psi(x)$

Условию третьего рода: $\left(\frac{\partial u}{\partial n} + g(x)u\right)\big|_S = 0$

Здесь n – направление нормали к границе S, $\phi(x)$, $\psi(x)$, $g(x)$ – заданные на границе S функции.

Начальная задача для гиперболических и параболических уравнений состоит в определении функции $u(x, t)$, удовлетворяющих при всех $x \in \mathbb{R}^n$, $0 < t$ заданному уравнению, а при $t = 0$ – *начальным условиям*, или *данным Коши*:

в случае гиперболического уравнения: $u\big|_{t=0} = u_0(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0} = u_1(x)$,

*В действительности это уравнение приводится к (одномерному) волновому уравнению заменой $x = (\xi + \tau)/2a$, $t = (\xi - \tau)/2a$.

в случае параболического уравнения: $u|_{t=0} = u_0(x)$,

где $u_0(x)$, $u_1(x)$ – заданные функции.

Смешанная задача для гиперболических и параболических уравнений состоит в определении решения уравнения, одновременно удовлетворяющему как краевым, так и начальным условиям. *

Вышеперечисленные постановки задач можно отнести к числу *стандартных*. Приведем пример нестандартной постановки.

Характеристики и начальная задача

Данные Коши могут задаваться не только при $t = 0$ (т.е. на плоскости в пространстве (x, t)), но и при $t = \sigma(x)$ (иными словами, на поверхности в пространстве (x, t)) при определенных условиях на поверхность $\sigma(x)$. Сформулируем эти условия.

Определение 4.2. Поверхность в пространстве $x \in \mathbb{R}^n$, неявно определяемая уравнением $\omega(x) = 0$, называется характеристической поверхностью для уравнения (4.1), если функция $\omega(x) \neq \mathrm{const}$ и удовлетворяет (характеристическому) уравнению

$$\sum_{j,k=1}^{n} a_{jk}(x) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_k} = 0$$

Пример 4.3. *1) Для волнового уравнения характеристическим будет уравнение*

$$\left(\frac{\partial \omega}{\partial t}\right)^2 = a^2 \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_j}\right)^2 ,$$

а характеристическими поверхностями – конусы с осью, параллельной оси t: $a^2(t-t_0)^2 - |x-x_0|^2 = 0 \ \ \forall\, t_0\,,\ x_0$; другое семейство характеристик: $tt_0 + (x, x_0) = \mathrm{const}$ – плоскости, касательные к характеристическому конусу.
2) Для "преобразованного" волнового уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial \xi} = 0$ характеристическим будет уравнение $\frac{\partial \omega}{\partial \tau}\frac{\partial \omega}{\partial \xi} = 0$, а характеристиками – прямые $\xi = \mathrm{const}$ и $\tau = \mathrm{const}$.
3) Уравнение Лапласа не имеет характеристик, поскольку уравнение $\sum\limits_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_j}\right)^2 = 0$ не имеет вещественных нетривиальных решений.

Как можно показать, роль характеристик в постановке задачи Коши следующая: для того, чтобы данные Коши могли быть заданы на поверхности $\sigma(x)$, эта поверхность не должна иметь точек касания с какой-либо из характеристических поверхностей (иными словами, начальные данные не могут быть заданы на характеристиках).

Пример 4.4. *(контрпример)*
Посмотрим, к чему может привести постановка начальных данных на характеристике, рассмотрев уравнение из примера 4.3-(2). Пусть данные Коши ставятся на характеристике $\tau = 0$: $u|_{\tau=0} = u_0(\xi)$, $\frac{\partial u}{\partial \tau}\big|_{\tau=0} = u_1(\xi)$. Ясно, что решение может существовать

*Начальные и краевые *данные* (т.е. заданные функции) не всегда могут задаваться произвольно; при произвольном задании данных задача может оказаться неразрешимой.

только, если $\frac{\partial u_1}{\partial \xi} = 0$, *т.е.* $u_1 = C$. *Тогда решение* $u(\xi, \tau) = u_0(\xi) + C\tau + f(\tau)$, *где* $f(\tau)$ – *произвольная гладкая функция с условиями* $f(0) = f'(0) = 0$. *Таким образом, постановка начальных данных на характеристике (в этом примере) приводит к потере единственности задачи Коши.*

Всякая задача математической физики является моделью какого-либо физического процесса. Поэтому естественными требованиями на постановку задачи являются:

- существование решения, или *разрешимость задачи*
- возможность существования только одного решения, или *единственность задачи*
- при малом изменении данных задачи решение при всех значениях аргументов также должно меняться мало, или *непрерывная зависимость от данных задачи*

Задача математической физики, относительно которой можно доказать выполнение всех трех вышеперечисленных свойств, называется **корректно поставленной**. Доказательство корректности, как правило, является трудной проблемой, техника и приемы решения которой зависят от конкретного уравнения, вида области и пр. Можно показать, что стандартные постановки задач для перечисленных в примере 4.1 уравнений являются корректно поставленными. Сравнительно просто доказывается единственность этих задач (см. §4.3). Отметим, что доказательство единственности важно в силу следующего обстоятельства: для областей со сравнительно простой геометрией иногда удается построить решение явно, если искать его в каком-либо специальном виде (например, методом разделения переменных); без независимо доказанной теоремы единственности нельзя было бы утверждать, что таким построением исчерпаны все возможные решения.

4.2.1 Теорема Ковалевской и пример Адамара

В теории обыкновенных дифференциальных уравнений и систем таких уравнений известны теоремы локальной разрешимости и единственности задачи Коши (теорема Пикара и ее аналоги). Сформулируем сходный результат для уравнений в частных производных. Приводимая ниже формулировка является частным случаем известной теоремы С.Ковалевской.

Определение 4.3. Уравнение в частных производных 2-го порядка называется нормальным относительно одной из переменных, например x_1, если оно может быть записано в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \Phi(x, u, \dots)\,, \tag{4.2}$$

где под многоточием могут пониматься разнообразные производные функции u, кроме $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$. Также будем называть аналитической в области функцию многих переменных, если в окрестности каждой точки области эта функция представляется сходящимся рядом Тэйлора.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения (4.2):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \Phi(x, u, \dots)\,, \quad u\big|_{x_1 = x_1^{(0)}} = u_0(x_2, ..., x_n)\,, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{x_1 = x_1^{(0)}} = u_1(x_2, ..., x_n)\,. \tag{4.3}$$

Теорема 4.1. *Если функции $u_{0,1}$ аналитичны в некоторой окрестности $n-1$-мерной точки $(x_2^{(0)},...,x_n^{(0)})$ и функция Φ аналитична в окрестности точки $(x^{(0)}, u|_{x^{(0)}}, \ldots|_{x^{(0)}})$, где $x^{(0)}=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},...,x_n^{(0)})$, то задача Коши (4.3) имеет единственное решение в некоторой окрестности точки $x^{(0)}$.*

Данная теорема, однако, не решает вопроса о корректности задачи (4.3): во-первых, она гарантирует однозначную разрешимость лишь "в малом" и, во-вторых ничего не говорит о непрерывной зависимости от начальных данных. Следующий пример показывает, что если уравнение (4.2) является *эллиптическим*, непрерывная зависимость от начальных данных *не имеет места.*

Пример 4.5. *(Адамара)*
Запишем уравнение Лапласа как $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1}=-\frac{\partial^2 u}{\partial x_2}$. Ясно, что это – нормальное уравнение (глобально). Поставим к нему две задачи Коши:
(1) $u|_{x_1=0}=\left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{x_1=0}=0$;
(2) $u|_{x_1=0}=0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|_{x_1=0}=\frac{1}{k}\sin kx_2$;
При достаточно больших k начальные данные этих двух задач сколь угодно близки. Однако решения этих задач, которыми являются $u^{(1)}=0$ и $u^{(2)}=\frac{1}{k^2}\sinh kx_1\sin kx_2$, при любом $x_1>0$ отличаются друг от друга сколь угодно сильно, если выбрать k достаточно большим.

Классические и обобщенные решения

Различают *классические* и *обобщенные* решения задач математической физики. Под классическим понимается решение, которое является настолько гладким, что имеет все входящие в уравнение производные, т.е. уравнение удовлетворяется как обычное тождество. Такое понимание решения недостаточно с точки зрения приложений. Более общим подходом является постановка задач, решения которых могут быть негладкими и даже разрывными функциями, а уравнение понимается в смысле обобщенных функций. Выше обсуждались, разумеется, постановки классических задач. Глава 5 посвящена некоторым примерам обобщенных решений задач математической физики.

4.3 ТЕОРЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ

4.3.1 Формулы Грина

При доказательстве теорем единственности используются так называемые формулы Грина. Их вывод не сложен: применим известную формулу Гаусса-Остроградского к векторному полю вида $\vec{A}(x):=u(x)\nabla v(x)$, где $u,v\in C^2(D)$, $D\subset\mathbb{R}^n$. Учитывая $\mathrm{div}\vec{A}=u\Delta v+\nabla u\cdot\nabla v$ и $A_n=u(\nabla v\cdot\vec{n})=u\frac{\partial v}{\partial n}$, где $\vec{n}$ – единичный вектор внутренней нормали к границе S области D, получаем

$$\int_D(u\Delta v+\nabla u\cdot\nabla v)\,dx=\oint_S u\frac{\partial v}{\partial n}dS\,,\quad \int_D(u\Delta v-v\Delta u)\,dx=\oint_S\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS \quad (4.4)$$

(вторая формула получена путем вычитания из первой симметричной формулы). *

*Формулы Грина являются многомерным аналогом интегрирования по частям: $\int\limits_a^b(uv''+(u')^2)dx=uv'|_a^b$.

4.3.2 Единственность внутренней смешанной задачи для волнового уравнения

Интеграл энергии

Утверждение 4.1. *Пусть функция u удовлетворяет в области D однородному волновому уравнению $u_{tt} = a^2\Delta u$, а на границе S этой области – одному из следующих однородных краевых условий: $u|_S = 0$ или $\frac{\partial u}{\partial n}\big|_S = 0$. Тогда интеграл $E := \int_D \left(u_t^2 + a^2(\nabla u)^2\right) dx$ (называемый интегралом энергии) не зависит от времени.*

■ $\frac{1}{2}\frac{dE}{dt} = \int_D \left(u_t u_{tt} + a^2\nabla u_t \cdot \nabla u\right) dx = a^2 \int_D \left(u_t\Delta u + \nabla u_t \cdot \nabla u\right) dx = a^2 \oint_S u_t\frac{\partial u}{\partial n}dS$. Последний интеграл равен нулю в силу краевых условий $\left(u|_S = 0\ \forall t \Rightarrow u_t|_S = 0\right)$. ■

Для доказательства единственности решения смешанной задачи для волнового уравнения достаточно показать, что:

Утверждение 4.2. *Задача $u_{tt} = a^2\Delta u$ в D, $u|_S = 0$ или $\frac{\partial u}{\partial n}\big|_S = 0$, $u|_{t=0} = 0$, $u_t|_{t=0} = 0$ имеет только нулевое решение.*

■ Т.к. $u|_{t=0} = 0$, то и $\nabla u|_{t=0} = 0$. С учетом $u_t|_{t=0} = 0$ имеем $E|_{t=0} = 0$. Но тогда $E(t) \equiv 0$. Т.к. подинтегральная функция в интеграле энергии не отрицательна, то это возможно только, если $u_t \equiv 0$, $\nabla u \equiv 0$. Таким образом, $u \equiv \mathrm{const}$. Но только нулевая постоянная удовлетворяет нулевому начальному условию. ■

4.3.3 Единственность внутренней смешанной задачи для уравнения теплопроводности

В случае уравнения теплопроводности единственность следует из утверждения:

Утверждение 4.3. *Задача $u_t = a^2\Delta u$ в D, $u|_S = 0$ или $\frac{\partial u}{\partial n}\big|_S = 0$, $u|_{t=0} = 0$ имеет только нулевое решение.*

■ Вместо интеграла энергии рассмотрим $\int_D \left(\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(u^2) + a^2(\nabla u)^2\right) dx = \int_D \left(uu_t + a^2(\nabla u)^2\right) dx$ $= a^2 \int_D \left(u\Delta u + (\nabla u)^2\right) dx = a^2 \oint_S u\frac{\partial u}{\partial n}dS = 0$ в силу граничных условий. Если $\frac{\partial}{\partial t}(u^2) > 0$, то равенство нулю этого интеграла невозможно. Поэтому $\frac{\partial}{\partial t}(u^2) \leqslant 0$. Но $u^2|_{t=0} = 0$, поэтому $u^2|_{t>0} \leqslant 0 \Rightarrow u^2 \equiv 0$. ■

4.3.4 Единственность внутренней краевой задачи для уравнения Пуассона

Внутренняя задача Дирихле единственна, тогда как внутренняя задача Неймана – нет.

Утверждение 4.4. *Задача $\Delta u = 0|_D$ имеет только нулевое решение при краевом условии $u|_S = 0$; в случае краевого условия $\frac{\partial u}{\partial n}\big|_S = 0$ решением может быть любая постоянная.*

■ Напишем формулу Грина (4.4): $\int_D \left(u\Delta u + (\nabla u)^2\right) dx = \oint u\frac{\partial u}{\partial n}dS = 0$. Учитывая $\Delta u = 0$, остается $\nabla u = 0 \Rightarrow u|_D = \mathrm{const}$. В случае краевого условия Дирихле эта постоянная может быть только нулем. ■

Замечание 4.1. *(о разрешимочти внутренних задач для уравнения Пуассона)*
Необходимым условием разрешимости задачи Неймана $-\Delta u = f(x)|_D$, $\frac{\partial u}{\partial n}\big|_S = \psi$ является равенство $\int_D f(x)dx + \oint_S \psi dS = 0$ (которое есть не что иное, как формула Грина (4.4), написанная для решения u и функции $v \equiv 1$). Это соотношение имеет физический смысл закона сохранения: действие внешних источников внутри области уравновешивается притоком через границу.

4.3.5 Единственность внешних краевых задач для уравнения Пуассона

Для единственности внешних краевых задач для уравнения Пуассона необходимо дополнительное условие $u(\infty) = 0$ (т.е. единственность имеет место только в классе убывающих на бесконечности функций).

Теорема 4.2. *Если $u(x)$ – гармоническая вне некоторого шара U_R функция, т.е. $\Delta u|_{\mathbb{R}^3\setminus U_R} = 0$, и $u(\infty) = 0$, то $u \underset{|x|\to\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{|x|}\right)$, $|\nabla u| \underset{|x|\to\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{|x|^2}\right)$.*

Утверждение 4.5. *Задача $\Delta u|_{\mathbb{R}^3\setminus D} = 0$, $u|_S = 0$ или $\frac{\partial u}{\partial n}\big|_S = 0$, $u(\infty) = 0$ имеет единственное решение $u \equiv 0|_{\mathbb{R}^3\setminus D}$.*

■ Для доказательства погрузим область D в шар U_R достаточно большого радиуса и напишем формулу Грина по многосвязной области $D_R := U_R \setminus D$ для гармонической функции u:

$$\int_{D_R} (\nabla u)^2 dx = \oint_S u \frac{\partial u}{\partial n} dS + \oint_{S_R} u \frac{\partial u}{\partial n} dS\,,$$

где S_R – поверхность шара U_R. Первый из поверхностных интегралов равен нулю в силу краевых условий, а второй – стремится к нулю при $R \to \infty$ в силу оценок теоремы 4.2:

$$\left|\oint_{S_R} u \frac{\partial u}{\partial n} dS\right| \leqslant \frac{1}{R^3} \oint dS = \frac{4\pi}{R} \underset{R\to\infty}{\to} 0\ .$$

Таким образом, $\int_{\mathbb{R}^3\setminus D} (\nabla u)^2 dx = 0 \Rightarrow u|_{\mathbb{R}^3\setminus D} \equiv \mathrm{const}$, где с учетом $u(\infty) = 0$ постоянная может быть только нулем. ■

4.3.6 Уравнение Гельмгольца, условия излучения и задача дифракции

Внутренняя задача и собственные функции оператора Лапласа

Рассмотрим внутреннюю краевую задачу (ограничимся условием Дирихле) для уравнения Гельмгольца:

$$\Delta u + k^2 u = f(x)\big|_D\ , \quad u|_S = u_0(x)\,.$$

(параметр k называется волновым числом). Вопрос о единственности этой задачи сводится к вопросу об отсутствии нетривиальных решений задачи на собственные функции оператора Лапласа в области D:

$$-\Delta u = \lambda u\big|_D\ , \quad u|_S = 0\,, \tag{4.5}$$

где $\lambda := k^2$.

Заметим, что при $\lambda \neq 0$ из формулы Грина следует лишь $\int_D \left(|\nabla u|^2 - \lambda |u|^2\right) dx = 0$, откуда невозможно сделать вывод о единственности (ср. с разделом *4.3.4*). И действительно, справедлива

Теорема 4.3. *Существует счетный набор положительных чисел λ_n (собственных чисел), при которых задача (4.5) имеет нетривиальные решения; собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны: $\int_D u_n u_m = 0$, $n \neq m$; собственные числа накапливаются на бесконечности: $\lambda_n \underset{n\to\infty}{\to} \infty$.* [*]

[*]Положительность собственных чисел и ортогональность собственных функций являются простыми следствиями формул Грина (4.4).

Замечание 4.2. *Задача на собственные функции (4.5) тесно связана с задачей на собственные колебания:* $v_{tt} - a^2 \Delta v = 0,\ v|_S = 0$. *Действительно, подстановкой* $v(x,t) = u(x)e^{\pm i\omega t}$ *приходим к задаче (4.5), в которой* $\lambda = \left(\frac{\omega}{a}\right)^2$.

Внешняя задача и условия излучения

Как отмечалось в разделе *4.3.5*, единственность внешней задачи для уравнения Пуассона имеет место только при дополнительном предположении об убывании решения на бесконечности. В случае уравнения Гельмгольца и этого предположения не достаточно для единственности! Действительно, как показано ниже (см. раздел *3.2.5*), фундаментальными решениями оператора Гельмгольца являются выражения $\frac{e^{\pm ik|x|}}{4\pi|x|}$ (в $\mathbb{R}^3$). Но тогда их разность $\frac{\sin k|x|}{4\pi|x|}$ будет удовлетворять однородному уравнению $\Delta u + k^2 u = 0$ во всем пространстве. Таким образом, нами предъявлено нетривиальное убывающее решение.

Оказывается (на точных формулировках мы здесь останавливаться не будем), что для единственности достаточно заменить условие убывания на бесконечности более сильными условиями, называемыми *условиями излучения Зоммерфельда*:

Определение 4.4. Говорят, что функция $u(x)$ удовлетворяет условиям излучения, если при $|x| \to \infty \quad u = \mathrm{O}\left(\frac{1}{|x|}\right),\ \frac{\partial u}{\partial |x|} \mp iku = \mathrm{o}\left(\frac{1}{|x|}\right)$.

Физический смысл условий излучения состоит в том, что в зависимости от выбора знака во втором из предельных соотношений, выделяются либо уходящие на бесконечность, либо приходящие из бесконечности волны. Например, если переход от волнового уравнения к уравнению Гельмгольца осуществляется путем отделения множителя $e^{-i\omega t}$, и в условиях излучения выбран верхний знак (-), то решению будет соответствать фазовый множитель $e^{-i\omega t + ik|x|}$. Этот фазовый множитель описывает (сферические) волновые фронты (т.е. поверхности постоянной фазы), которые с ростом времени уходят на бесконечность.

Волны, которые приходили бы из бесконечности, физического смысла иметь не могут – на бесконечности не могут находиться источники излучения. Таким образом, условия излучения фактически выделяют решение, имеющее физический смысл. Это решение можно выделить и из других соображений: при наличии поглощения в среде физически осмысленное решение должно экспоненциально затухать. В случае уравнения Гельмгольца поглощению соответствует наличие (положительной) мнимой части у волнового числа k. Оказывается, что при комплексных k решение внешней задачи единственно среди убывающих функций (эта теорема носит название *принципа предельного поглощения*). Как и следовало ожидать, можно доказать эквивалентность принципа предельного поглощения и условий излучения (в том смысле, что выделяемое каждым из этих двух подходов единственное решение – одно и то же).

Задача дифракции

Многочисленные физические приложения имеет следующая постановка задачи для уравнения Гельмгольца:

Определение 4.5. *Задачей дифракции* для уравнения Гельмгольца называется следующая постановка: известным считается *падающее поле*, т.е. функция $u_i(x)$, которая удовлетворяет уравнению Гельмгольца* вне области D; требуется определить *рассеянное, или*

*Например, плоская $e^{-i<k,x>}$ или сферическая $e^{-ik|x|}$ волна.

дифрагированное, поле, т.е. функцию $u_s(x)$, которая:
i) удовлетворяет уравнению Гельмгольца вне области D,
ii) в сумме с падающим полем удовлетворяет одному из краевых условий (например: $(u_i + u_s)|_S = 0$),
iii) удовлетворяет условиям излучения $u_s \underset{|x|\to\infty}{=} \mathrm{O}\left(\frac{1}{|x|}\right)$, $\frac{\partial u_s}{\partial |x|} - iku_s \underset{|x|\to\infty}{=} \mathrm{o}\left(\frac{1}{|x|}\right)$.

(отличие от стандартной постановки краевой задачи здесь в том, что источник задается не в виде правой части $f(x)$ в уравнении, а в виде падающего поля).

Ясно, что задача дифракции 4.5 является внешней краевой задачей с данными Дирихле $u_s|_S = -\,u_i|_S$, и поэтому корректно поставлена.

ГЛАВА 5

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

5.1 ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА КОШИ

5.1.1 Обобщенная задачи Коши для волнового уравнения

Задачи Коши состоит в отыскании функции $u(\vec{x},t)$, удовлетворяющей при $\vec{x}\in\mathbb{R}^3$, $t>0$ уравнению $u_{tt}-a^2\Delta u=f(\vec{x},t)$ и при $t=0$ — начальным условиям $u|_{t=0}=u_0(\vec{x})$, $u_t|_{t=0}=u_1(\vec{x})$. В случае обобщенных решений говорить об их "значениях" при $t=0$ не имеет смысла, поэтому постановка обобщенной задачи Коши нуждается в переформулировке (см. также параграф *1.6.3*).

Будем рассматривать задачу при всех, в том числе отрицательных, временах и под решением понимать функцию $u(\vec{x},t)$, удовлетворяющую волновому уравнению при $t>0$ (т.е. допускающую два дифференцирования по t при $t>0$) и продолженную нулем на область $t<0$. Аналогично будем понимать правую часть $f(\vec{x},t)$. Вычислим вторую производную по времени от $u(\vec{x},t)$:

$$\begin{aligned}(u_{tt},\phi)=(u,\phi_{tt})&=\int d\vec{x}\int\limits_0^\infty dt\,u\phi_{tt}=\\&=\int d\vec{x}\left(-u_0\,\phi_t|_{t=0}+u_1\,\phi|_{t=0}+\int\limits_0^\infty dt\,\left[a^2\Delta u+f(\vec{x},t)\right]\phi\right)=\\&=\left(a^2\Delta u+f(\vec{x},t)+u_0\cdot\delta'(t)+u_1\cdot\delta(t),\phi\right)\,.\end{aligned}\tag{5.1}$$

Таким образом, мы приходим к следующему определению:

Определение 5.1. Обобщенной задачей Коши называется уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\Delta\right)u(\vec{x},t)=f(\vec{x},t)+u_0\cdot\delta'(t)+u_1\cdot\delta(t)\,,\quad f(\vec{x},t)|_{t<0}\equiv 0\,,\tag{5.2}$$

понимаемое в смысле обобщенных функций.

Утверждение 5.1. *Задача (5.2) имеет единственное решение в классе $\mathcal{S}'$; это решение непрерывно зависит от данных задачи.*

■ Решение уравнения (5.2) дается формулой $u=\mathcal{E}*\mathcal{F}$, в которой $\mathcal{E}$ – фундаментальное решение волнового оператора, равное нулю при отрицательных t (ранее обозначаемое как $\mathcal{E}_+$), $\mathcal{F}=f(\vec{x},t)+u_0\cdot\delta'(t)+u_1\cdot\delta(t)$ – данные задачи. Свертка существует по следующим причинам: *1)* носитель фундаментального решения по переменным $\vec{x}$ ограничен (см. формулы разделов *3.2.1*, *3.2.2*); *2)* правая часть $\mathcal{F}$ полуфинитна по t. В силу непрерывности свертки (как непрерывного функционала) $\mathcal{E}*\mathcal{F}_n \to \mathcal{E}*\mathcal{F}$, если $\mathcal{F}_n \to \mathcal{F}$, т.е. $\mathcal{E}*\mathcal{F}$ непрерывно зависит от $\mathcal{F}$. В частности, при $\mathcal{F}=0$ имеем $\mathcal{E}*\mathcal{F}=0$, что и означает единственность. ■

Рассмотрим более подробно структуру решения уравнения (5.2) :

$$u = \mathcal{E} * \mathcal{F} := \mathcal{E} * \{f(\vec{x},t) + u_0(\vec{x})\cdot\delta'(t)) + (u_1(\vec{x})\cdot\delta(t)\}\ . \tag{5.3}$$

По свойствам свертки †

$$g(\vec{x},t)\ *_t\ \delta(t) = g(\vec{x},t)\,, \quad g(\vec{x},t)\ *_t\ \delta'(t) = \frac{\partial g(\vec{x},t)}{\partial t}\ *_t\ \delta(t) = \frac{\partial g(\vec{x},t)}{\partial t}\,,$$

где $*_t$ означает свертку по переменной t. Поэтому мы можем переписать решение, вычислив свертку по t:

$$u = \mathcal{E} * f(\vec{x},t) + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}\ *_{\vec{x}}\ u_0(\vec{x}) + \mathcal{E}\ *_{\vec{x}}\ u_1(\vec{x})\,. \tag{5.4}$$

Формула (5.4) и является окончательным решением задачи Коши в общем случае (слагаемые в правой части этой формулы часто называют запаздывающими потенциалами). Ниже мы подробно обсудим эту формулу в различных размерностях.

5.1.2 Распространение волн

Рассмотрим физический смысл решений, описываемых формулами (5.3) или (5.4) .

Во-первых, решение $u(\vec{x},t)$ в точке $\vec{x}$ и в момент времени $t>0$, выражаемое сверткой $\mathcal{F}*\mathcal{E}$, является наложением (суперпозицией) "элементарных" возмущений $\mathcal{F}(\vec{\xi},\tau)\mathcal{E}(\vec{x}-\vec{\xi},t-\tau)$. Это обстоятельство носит название принципа Гюйгенса.

Предположим, что $\mathcal{F}$ — финитная функция. Тогда $u(\vec{x},t)$ — тоже финитная функция, причем ее носитель является объединением множеств тех точек $(\vec{x},t)$, которые принадлежат носителю $\mathcal{E}(\vec{x}-\vec{\xi},t-\tau)$, когда $(\vec{\xi},\tau)$ пробегает носитель $\mathcal{F}$:

$$\operatorname{supp} u = \bigcup_{(\vec{\xi},\tau)\in\operatorname{supp}\mathcal{F}} \operatorname{supp}\mathcal{E}(\vec{x}-\vec{\xi},t-\tau)\,.$$

Иными словами, финитные "источники" $\mathcal{F}$ порождают отличное от нуля решение в ограниченной области пространства, которая, однако, зависит от времени — происходит процесс распространения возмущения (распространение волны).

Конкретная реализация этого процесса зависит от структуры носителя фундаментального решения $\mathcal{E}(\vec{x},t)$ и, следовательно, по-разному проявляется в различных размерностях.

$\mathbb{R}^3$ $\mathcal{E}(\vec{x},t) = \theta(t)\frac{1}{4\pi a^2 t}\delta_{S_{at}}(\vec{x})\,.$

Пространственным носителем $\mathcal{E}(\vec{x},t)$ является сфера радиуса at. Следовательно, носитель $\mathcal{E}(\vec{x}-\vec{\xi},t-\tau)$ — это сфера радиуса $a|t-\tau|$ с центром в точке $\vec{x}$, а носителем $u(\vec{x},t)$ будет объединение таких сфер, в котором точка $(\vec{\xi},\tau)$ пробегает $\operatorname{supp}\mathcal{F}$. Предположим, точка $\vec{x}$ находится вне $\operatorname{supp}\mathcal{F}$, т.е. $\vec{x}\notin \operatorname{supp} f\cup\operatorname{supp} u_0\cup\operatorname{supp} u_1$ (иными

†Данная выкладка не является строгой; ее следует уточнить, используя прием, примененный при выводе формулы (5.1).

словами, в этой точке нет внешних источников f и в начальный момент времени нет возмущения). Тогда при достаточно малых t $u(\vec{x},t)=0$; возмущение достигает точку $\vec{x}$ лишь при таких значениях t, для которых $a|t-\tau| \geqslant \inf\limits_{(\vec{\xi},\tau)\in \operatorname{supp}\mathcal{F}} \left|\vec{x}-\vec{\xi}\right|$. Минимальное из таких значений t называют моментом прохождения *переднего фронта* волны через точку $\vec{x}$. Однако ясно, что в точке $\vec{x}$ вновь наступит "покой", если $a|t-\tau| \geqslant \sup\limits_{(\vec{\xi},\tau)\in \operatorname{supp}\mathcal{F}} \left|\vec{x}-\vec{\xi}\right|$. Минимальное из таких значений t называют моментом прохождения *заднего фронта*. Таким образом, в каждой точке решение отлично от нуля только в промежутках времени между моментами проходдения переднего и заднего фронтов (разумеется, эти промежутки для разных точек могут быть, вообще говоря, различными).

$\mathbb{R}^2$ $\mathcal{E}(\vec{x},t)=\theta(t)\frac{1}{2\pi a}\frac{\theta(at-r)}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}$.
Пространственным носителем $\mathcal{E}(\vec{x},t)$ является круг радиуса at. Следовательно, носитель $\mathcal{E}(\vec{x}-\vec{\xi},t-\tau)$ — это круг радиуса $a|t-\tau|$ с центром в точке $\vec{x}$, а носителем $u(\vec{x},t)$ будет объединение таких кругов, в котором точка $(\vec{\xi},\tau)$ пробегает $\operatorname{supp}\mathcal{F}$. Аналогичным рассуждением убеждаемся в том, что для точки $\vec{x}$, находящейся вне $\operatorname{supp}\mathcal{F}$, существует передний фронт волны. Однако задний фронт отсутствует: при любых временах, больших момента прохождения переднего фронта, решение $u(\vec{x},t)$ отлично от нуля. Явление отсутствия заднего фронта волны называют *диффузией волн*. В случае ограниченной при $t\to\infty$ функции внешних источников $f(\vec{x},t)$ амплитуда решения убывает как $u(\vec{x},t) \underset{t\to\infty}{=} \mathrm{O}\left(t^{-1}\right)$.

$\mathbb{R}^1$ $\mathcal{E}(x,t)=\frac{1}{2a}\theta(t)\theta(at-|x|)$.
Пространственным носителем $\mathcal{E}(\vec{x},t)$ является отрезок $(-at,at)$, однако (в отличии от двумерного случая!) носителем $\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t}(x,t)=\frac{1}{2}\delta(at-|x|)$ будет пара точек $x=\pm at$. Поэтому в одномерном случае передний фронт всегда присутствует, а вот наличие заднего фронта (отсутствие диффузии волн) зависит от начальных данных. Действительно, если $f(x,t)=0$, $u_1(x)=0$, то (см. формулу (5.4)) решение выражается формулой $u(x,t)=\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t}*_x u_0$, и у него присутствуют оба фронта. В случае же $f(x,t)\neq 0$ или $u_1(x)\neq 0$ в решение входит само $\mathcal{E}$, задний фронт отсутствует, т.е. имеет место диффузия волн.

5.1.3 Функция Грина задачи Коши

Обсудим частный случай задачи (5.2) : $f(\vec{x},t)=0$, $u_0(\vec{x})=0$, $u_1(\vec{x})=\delta(\vec{x}) \Rightarrow$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\Delta\right)u(\vec{x},t)=\delta(\vec{x})\delta(t)=\delta(\vec{x},t)\,.$$

Это уравнение совпадает с уравнением фундаментального решения, тем самым $u(\vec{x},t)=\mathcal{E}_+(\vec{x},t)$. Индекс "+" указывает на равенство решения нулю при $t<0$; выше мы формально записывали это обстоятельство, выделяя множителем $\theta(t)$. Таким образом, $u(\vec{x},t)=\theta(t)\mathcal{G}(\vec{x},t)$, где функцию $\mathcal{G}_+(\vec{x},t)$ можно (опять же формально) понимать как решение следующей задачи Коши:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a^2\Delta\right)\mathcal{G}(\vec{x},t)=0\,,\quad \mathcal{G}\big|_{t=0}=0\,,\quad \mathcal{G}_t\big|_{t=0}=\delta(\vec{x})\,. \tag{5.5}$$

Задаче (5.5) можно придать следующий смысл: мы будем рассматривать $\mathcal{G}(\vec{x},t)$ как обобщенную функцию $\vec{x}$, зависящую от t как от параметра; тогда начальные данные понимаются как значения этой функции при нулевом значении параметра. В таком смысле, $\mathcal{G}(\vec{x},t)$ называется функцией Грина задачи Коши. Из сравнения этой функции с фундаментальным решением ясно, что выражения для нее получаются из формул разделов *3.2.1*, *3.2.2* путем отбрасывания $\theta(t)$.

5.1.4 Формула Даламбера

Рассмотрим решение задачи Коши в пространстве $\mathbb{R}^1$, считая данные задачи локально-интегрируемыми функциями. Не будем пользоваться здесь формулой (5.4), а вычислим свертку непосредственно. С учетом $f(x,t)|_{t<0}$ получаем

$$
\begin{aligned}
u &= \mathcal{E} * f(x,t) + \mathcal{E} * (u_0(x)\cdot\delta'(t)) + \mathcal{E} * (u_1(x)\cdot\delta(t)) = \\
&= \frac{1}{2a}\int\int \theta(\tau)\theta(a\tau-|\xi|) f(x-\xi,t-\tau)d\tau d\xi + \\
&+ \frac{1}{2a}\int\int \theta(\tau)\theta(a\tau-|\xi|) u_0(x-\xi)\delta'(t-\tau)d\tau d\xi + \\
&+ \frac{1}{2a}\int\int \theta(\tau)\theta(a\tau-|\xi|) u_1(x-\xi)\delta(t-\tau)d\tau d\xi = \\
&= \frac{\theta(t)}{2a}\int\limits_0^t\int\limits_{-a\tau}^{a\tau} f(x-\xi,t-\tau)d\tau d\xi + \\
&+ \frac{\theta(t)}{2a}\int\limits_0^\infty\int\limits_{-a\tau}^{a\tau} u_0(x-\xi)\delta'(t-\tau)d\tau d\xi + \frac{\theta(t)}{2a}\int\limits_0^\infty\int\limits_{-a\tau}^{a\tau} u_1(x-\xi)\delta(t-\tau)d\tau d\xi +
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\theta(t)}{2a}\int\limits_0^t\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\tau d\xi + \frac{\theta(t)}{2a}\frac{d}{dt}\int\limits_{-at}^{at} u_0(x-\xi)d\xi + \frac{\theta(t)}{2a}\int\limits_{-at}^{at} u_1(x-\xi)d\xi = \\
&= \theta(t)\left[\int\limits_0^t \frac{1}{2a}\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\tau d\xi + \frac{u_0(x+at)+u_0(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} u_1(\xi)d\xi\right].
\end{aligned}
$$

Полученный результат носит название формулы Даламбера. Она дает обобщенное решение задачи Коши. В случае достаточно гладких данных задачи (а именно, $f(x,t)\in C^1$, $u_0(x)\in C^2$, $u_1(x)\in C^1$) этой формулой выражаются классические решения.

Замечание 5.1. *(принцип Дюамеля)*
Запишем первое слагаемое в квадратных скобках как $\int\limits_0^t v(x,t;\tau)d\tau$, *где* $v(x,t;\tau) :=$
$:= \frac{1}{2a}\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)d\xi$. *Функция* $v(x,t;\tau)$ *обладает следующими свойствами:*

1) $\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\Delta\right) v(x,t;\tau) = 0 \ \forall\ \tau;$ [*]

2) $v(x,t;\tau)\big|_{t=\tau} = 0;$

3) $v_t(x,t;\tau)\big|_{t=\tau} = f(x,\tau);$

Данные свойства означают, что неоднородность $f(x,t)$, входящая в правую часть волнового уравнения, может быть учтена посредством вспомогательной задачи Коши 1)—3). То же самое имеет место и в старших размерностях.

5.1.5 Формулы Кирхгофа и Пуассона

Применим формулу (5.4) в $\mathbb{R}^3$. Напомним, что если $\delta_{S_\rho}(x)$ – δ-функция, сосредоточенная на сфере радиуса ρ с центром в начале координат (для краткости пишем x вместо $\vec{x}$, т.д.), то интегралы вида $\int \delta_{S_\rho}(x)\phi(x)dx$ понимаются как $\int\limits_{S_\rho} \phi(x)dS_x$. Соответственно, $\int \delta_{S_\rho}(x - x_0)\phi(x)dx = \int\limits_{S_\rho(x_0)} \phi(x)dS_x$, где $S_\rho(x_0)$ – сфера радиуса ρ с центром в точке x_0. С учетом сделанного замечания получаем:

$$\mathcal{E} * f(x,t) = \theta(t)\int\limits_0^t v(x,t;\tau)d\tau\,, \quad v(x,t;\tau) = \frac{1}{4\pi a^2(t-\tau)}\int\limits_{S_{a(t-\tau)}(x)} f(\xi,\tau)dS_\xi\,;^\dagger$$

$$\mathcal{E} *_x u_1(x) = \theta(t)\frac{1}{4\pi a^2 t}\int\limits_{S_{at}(x)} u_1(\xi)dS_\xi;$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} *_x u_0(x) = \theta(t)\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi a^2 t}\int\limits_{S_{at}(x)} u_0(\xi)dS_\xi\right].$$

Таким образом, мы приходим к известной формуле Кирхгофа, дающей решение обобщенной задачи Коши в $\mathbb{R}^3$:

$$u(x,t) = \theta(t)\left[\int\limits_0^t v(x,t;\tau)d\tau + \frac{\partial}{\partial t}\left\{t\mathcal{M}_{S_{at}(x)}[u_0]\right\} + \left\{t\mathcal{M}_{S_{at}(x)}[u_1]\right\}\right], \tag{5.6}$$

где $v(x,t;\tau) = (t-\tau)\mathcal{M}_{S_{a(t-\tau)}(x)}[f|_{t-\tau}]$, $\mathcal{M}_{S_{at}(x)}[g] := \frac{1}{4\pi a^2t^2}\int\limits_{S_{at}(x)} g(x)dS_x$ – среднее значение функции $g(x)$ на сфере $S_{at}(x)$.

Из формулы Кирхгофа можно вывести формулу Пуассона, решающую аналогичную задачу в $\mathbb{R}^2$. С этой целью заметим, что интегрирование по сфере $\int\limits_{S_\rho} gdS$ в случае $g = g(x,y)$ сводится к интегрированию по кругу:

$$\int\limits_{S_\rho} g(x,y)\,dS_{(x,y,z)} = 2\int\limits_{x^2+y^2\leqslant\rho^2} g(x,y)\frac{d\sigma}{\cos(\vec{n},\vec{z})} = 2\rho\int\limits_{x^2+y^2\leqslant\rho^2} g(x,y)\frac{d\sigma}{\sqrt{\rho^2-x^2-y^2}}.$$

[*] Это свойство непосредственно вытекает из того факта, что $v(x,t;\tau)$ фактически зависит от $x+at$ и $x-at$.

[†] Можно показать, что и здесь функция $v(x,t;\tau)$ удовлетворяет принципу Дюамеля, т.е. обладает свойствами *1)–3)* замечания 5.1.

В результате такой редукции мы получаем формулу, аналогичную (5.6):

$$u(x,y,t)=\theta(t)\left[\int\limits_0^t \widetilde{v}(x,y,t;\tau)d\tau+\frac{\partial}{\partial t}\left\{t\widetilde{\mathcal{M}}_{C_{at}}(x,y)[u_0]\right\}+\left\{t\widetilde{\mathcal{M}}_{C_{at}}(x,y)[u_1]\right\}\right],$$

в которой, однако, усреднение устроено по-другому, а именно

$$\widetilde{\mathcal{M}}_{C_{at}}(x,y)[g]=\frac{1}{2\pi at}\int\limits_{C_{at}(x,y)}\frac{g(\xi,\eta)}{\sqrt{(at)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}d\sigma_{\xi,\eta}\,.$$

где $C_{at}(x,y)$ – круг радиуса at с центром в точке (x,y).

5.1.6 Задачи Коши для уравнения теплопроводности

Рассуждая точно так же, как и в начале раздела *5.1.1*, мы приходим к следующей постановке обобщенной задачи Коши для уравнения теплопроводности:

Определение 5.2. Обобщенной задачей Коши для уравнения теплопроводности называется (понимаемое в смысле обобщенных функций) уравнение

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-a^2\Delta\right)u(\vec{x},t)=f(\vec{x},t)+u_0(\vec{x})\cdot\delta(t)\,,\quad f(\vec{x},t)\big|_{t<0}\equiv 0\,.$$

Сказанное по поводу корректности данной задачи в разделе *5.1.1* в равной мере применимо и здесь. Отличие состоит только в том, что фундаментальное решение оператора теплопроводности не имеет ограниченного носителя по пространственным переменным (см. раздел *3.2.3*). Однако эти решения быстро убывают, чем и гарантируется существование свертки.

Решение обобщенной задачи Коши дается формулой

$$u(\vec{x},t)=\mathcal{E}*(f(\vec{x},t)+u_0(\vec{x})\cdot\delta(t))=\mathcal{E}*f(\vec{x},t)+\mathcal{E}\,*_{\vec{x}}\,u_0(\vec{x})=$$
$$=\frac{\theta(t)}{(2a\sqrt{\pi})^n}\left[\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\mathbb{R}^n}d\vec{\xi}\frac{f(\vec{\xi},\tau)}{\sqrt{(t-\tau)^n}}\,e^{-\frac{|\vec{x}-\vec{\xi}|^2}{4a^2(t-\tau)}}+\frac{1}{\sqrt{t^n}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}d\vec{\xi}u_0(\vec{\xi})\,e^{-\frac{|\vec{x}-\vec{\xi}|^2}{4a^2t}}\right].$$

Так же, как и в случае волнового уравнения, можно ввести

Определение 5.3. Функцией Грина задачи Коши для уравнения (3.2) называется функция $\mathcal{G}(\vec{x},t)$ (обобщенная по $\vec{x}$ и зависящая от t как от параметра), удовлетворяющая однородному уравнению $\left(\frac{\partial}{\partial t}-a^2\Delta\right)\mathcal{G}=0$ и начальным данным $\mathcal{G}\big|_{t=0}=\delta(\vec{x})$.

Замечание 5.2. *Из полученной выше формулы для фундаментального решения $\mathcal{E}(\vec{x},t)$ следует, что $\mathcal{G}(\vec{x},t)=\frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n}e^{-\frac{r^2}{4a^2t}}$. Сравните (при $n=1$) этот результат с примером δ-образной последовательности 1.7.*

5.2 ФУНКЦИЯ ГРИНА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

В качестве примера обобщенных решений для эллиптических уравнений рассмотрим следующую задачу. Требуется найти функцию $G(x,x')$, $x,x' \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющую в области D уравнению $\Delta G = -\delta(x-x')$, и на границе S области D одному из следующих краевых условий: $G|_{x\in S} = 0\ \forall x' \in D$ (условие Дирихле) или $\frac{\partial G}{\partial n}\big|_{x\in S} = 0\ \forall x' \in D$, где n – внутренняя нормаль к S (условие Неймана).

Определение 5.4. Функция $G(x,x')$ называется функцией Грина краевой задачи для уравнения Лапласа.

Теорема 5.1. *В случае достаточно гладкой границы $G(x,x')$ функция Грина существует и симметрична по своим аргументам; в случае краевого условия Дирихле она единственна.*

Замечание 5.3. *Т.к. фундаментальным решением оператора Лапласа в $\mathbb{R}^3$ является выражение $-\frac{1}{4\pi|x|}$, то функцию Грина можно представить в виде $G(x,x') = -\frac{1}{4\pi|x-x'|} + g(x,x')$, где $g(x,x')$ – гармоническая в области D функция, удовлетворяющая (в случае задачи Дирихле) краевому условию $g|_{x\in S} = \frac{1}{4\pi|x-x'|}$*

5.2.1 Метод отражений

В случае областей со сравнительно простыми границами и с учетом замечания 5.3 функцию Грина можно построить, решив методом разделения переменных краевую задачу. Однако существует более короткий и физический наглядный способ решения. Мы проиллюстрируем этот метод на примерах.

Шар $|x| < R$

Пусть $y' := x'\left(\frac{R}{|x'|}\right)^2$ – точка, симметричная с x' относительно сферы S_R. Ищем $g(x,x')$ в виде $g(x,x') = \frac{\alpha}{4\pi|x-y'|}$, где α – некоторая константа, которую нужно подобрать, исходя из краевых условий. При подстановке в краевые условия учтем, что при $x \in S_R$ выполняется соотношение $\frac{R}{|x'|} = \frac{|x-y'|}{|x-x'|}$, откуда следует, что следует положить $\alpha = \frac{R}{|x'|}$ для условия Дирихле и $\alpha = -\frac{R}{|x'|}$ для условия Неймана.

Полупространство $x_3 > 0$

В качестве y' берем здесь точку, симметричную с x' относительно плоскости $x_3 = 0$. Аналогичными рассуждениями легко находим $\alpha = 1$ для условия Дирихле и $\alpha = -1$ для условия Неймана.

Полушар $|x| < R,\ x_3 > 0$

Здесь функцию $g(x,x')$ приходится (иначе не удается одновременно удовлетворить краевым условиям как на полусфере $S_R,\ x_3 > 0$, так и на круге $x_1^2 + x_2^2 \leqslant R^2$) искать в виде $g(x,x') = \frac{\alpha}{4\pi|x-y'|} + \frac{\alpha_1}{4\pi|x-y_1|} + \frac{\alpha_1'}{4\pi|x-y_1'|}$, где y' – точка, симметричная с x' относительно сферы,

y_1 и y_1' – точки, соответственно симметричные с x' и y' относительно плоскости $x_3 = 0$.[*] Опуская подробности вычислений и ограничиваясь условием Дирихле, приводим значения констант:

$$\alpha = \frac{R}{|y'|}\,, \quad \alpha_1 = 1\,, \quad \alpha_1' = -\frac{R}{|y'|}\,.$$

Двухгранный угол $x_2 > 0,\ x_3 > 0$

И здесь функцию $g(x, x')$ ищем в виде трех слагаемых: $g(x, x') = \frac{\alpha}{4\pi|x-y'|} + \frac{\alpha_1}{4\pi|x-y_1|} + \frac{\alpha_1'}{4\pi|x-y_1'|}$, где y' – точка, симметричная с x' относительно плоскости $x_3 = 0$, y_1 – точка, симметричная с x' относительно плоскости $x_2 = 0$ и y_1' – точка, симметричная с y_1 относительно плоскости $x_3 = 0$. Для условия Дирихле имеем

$$\alpha = 1\,, \quad \alpha_1 = 1\,, \quad \alpha_1' = -1\,.$$

[*]О функции Грина часто говорят как о поле точечного источника, а о методе отражений - как о методе мнимых источников. В данном случае решение является суммой полей от источника в точке x' и его отражений (образов) y' (от сферы) и y_1 (от плоскости); в свою очередь, появление образа y_1 заставляет ввести еще одно отражение y_1' – отражение точки y_1 от плоскости.

ДОПОЛНЕНИЯ

I ФУНКЦИИ x_+^λ

В разделе 1.4 обсуждались функционалы $\mathcal{P}\frac{1}{x^m}$, являющиеся регуляризациями целочисленных степенных особенностей. Здесь мы займемся регуляризациями особенностей несколько более общего вида, а именно, обсудим, какие функционалы отвечают функции

$$x_+^\lambda := \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ x^\lambda, & x > 0 \end{cases}, \tag{Д 1.1}$$

где λ – некоторое, вообще говоря комплексное, число.

Нетрудно видеть, что если $\operatorname{Re}\lambda > -1$, то функции (Д 1.1) отвечает регулярный функционал:

$$\left(x_+^\lambda, \phi\right) := \int\limits_0^\infty x^\lambda \phi(x) dx\,, \tag{Д 1.2}$$

где интеграл сходится. Заметим, что в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > -1$ сходится также и интеграл $\int\limits_0^\infty x^\lambda \ln x \phi(x) dx$, представляющий из себя производную по λ от функционала x_+^λ. Таким образом, для любой пробной функции ϕ функционал x_+^λ является регулярной функцией λ в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > -1$.

Рассмотрим теперь аналитическое продолжение этой регулярной функции в более широкую полуплоскость. Правую часть формулы (Д 1.2) можно переписать как

$$\int\limits_0^1 x^\lambda \left[\phi(x) - \phi(0)\right] dx + \int\limits_1^\infty x^\lambda \phi(x) dx + \frac{\phi(0)}{\lambda+1}\,.$$

В такой записи наш функционал, как функция λ, будет уже регулярен в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > -2$, за исключением точки $\lambda = -1$, где он имеет (простой) полюс. Учитывая простую формулу $-\frac{1}{\lambda+1} = \int\limits_1^\infty x^\lambda dx$, которая верна при $\operatorname{Re}\lambda < -1$, в полосе $-2 < \operatorname{Re}\lambda < -1$ мы можем также переписать формулу (Д 1.2) в виде

$$\left(x_+^\lambda, \phi\right) = \int\limits_0^\infty x^\lambda \left[\phi(x) - \phi(0)\right] dx\,.$$

Поступая аналогичным образом, мы можем продолжить функцию x_+^λ в полосу $-3 < \operatorname{Re}\lambda < -2$ и т.д. Формулой, осуществляющей аналитическое продолжение в полосу $-n <$

$\operatorname{Re}\lambda < -n+1$, будет следующая:

$$\left(x_+^\lambda, \phi\right) = \int\limits_0^\infty x^\lambda \left[\phi(x) - \phi(0) - x\phi'(0) - ... - x^{n-1}\frac{\phi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\right] dx\,, \qquad (\text{Д } 1.3)$$

а формулой, осуществляющей мероморфное продолжение в полуплоскость $\operatorname{Re}\lambda > -n$, будет

$$\begin{aligned} \left(x_+^\lambda, \phi\right) &= \int\limits_0^1 x^\lambda \left[\phi(x) - \phi(0) - x\phi'(0) - ... - x^{n-1}\frac{\phi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\right] dx + \qquad (\text{Д } 1.4) \\ &+ \int\limits_1^\infty x^\lambda \phi(x) dx \,+\, \sum_{k=1}^n \frac{\phi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!(\lambda+k)}\,. \end{aligned}$$

Утверждение Д 1.1. $(x_+^\lambda)' = \lambda x_+^{\lambda-1}\,, \quad \lambda \neq -1, -2, ...$

■ Очевидно, эта формула верна в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda > 0$, т.е. там $(x_+^\lambda, \phi) = -(\lambda x_+^{\lambda-1}, \phi')$. Поскольку как левая, так и правая части последнего равенства аналитически продолжаются на всю комплексную плоскость с выколотыми точками $-1, -2, ...$, то, в силу единственности аналитического продолжения, равенство будет справедливо и во всей плоскости, за исключением упомянутых точек. ■

Замечание Д 1.1. *Выше мы не специфицировали пространство основных функций, над которым определяются функционалы x_+^λ. Из приведенных формул ясно, что в качестве такового может быть взято пространство S.*

Пример Д 1.1. *Пусть $\phi_0 \in\ S$ - пробная функция, совпадающая с e^{-x} при $x > 0$. При $\operatorname{Re}\lambda > -1$ значение функционала x_+^λ на такой пробной функции есть $(x_+^\lambda, \phi_0) = \int\limits_0^\infty x^\lambda e^{-x} dx = \Gamma(\lambda+1)$ (см. дополнение III.)*

Замечание Д 1.2. *В дополнении III показано, что функция $\Gamma(\lambda+1)$ также является мероморфной функцией с простыми полюсами в точках $\lambda = -1, -2, ...$ Таким образом, отношение $\frac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}$ является целой функцией параметра λ.*

Совершенно аналогично функционалу x_+^λ можно рассмотреть и функционал x_-^λ, отвечающий функции

$$x_-^\lambda := \begin{cases} |x|^\lambda, & x < 0 \\ 0, & x \geqslant 0 \end{cases} .$$

Без обсуждения подробностей приведем формулу мероморфного продолжения этого функционала в полуплоскость $\operatorname{Re}\lambda > -n$

$$\begin{aligned} \left(x_-^\lambda, \phi\right) &= \int\limits_0^1 x^\lambda \left[\phi(-x) - \phi(0) - (-x)\phi'(0) - ... - (-x)^{n-1}\frac{\phi^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\right] dx + \quad (\text{Д } 1.5) \\ &+ \int\limits_1^\infty x^\lambda \phi(-x) dx \,+\, \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{\phi^{(k-1)}(0)}{(k-1)!(\lambda+k)}\,. \end{aligned}$$

Легко проверить, что:

$$x_+^\lambda + x_-^\lambda = |x|^\lambda\,, \quad x_+^\lambda - x_-^\lambda = |x|^\lambda \mathrm{sign} x\,. \tag{Д 1.6}$$

Функционалы $(x \pm i0)^\lambda$

Напомним, что функционалы $(x \pm i0)^\lambda$ при целых λ были введены в параграфе *1.4.4*. Нашей задачей сейчас является определение этих функционалов при произвольных комплексных λ.

Рассмотрим z^λ как функцию комплексной переменной $z = x+iy$. Очевидно $z^\lambda = e^{\lambda \ln z} = e^{\lambda \ln|z| + i\lambda \arg z}$ является многозначной функцией. Фиксируя её главную ветвь, $-\pi < \arg z < \pi$, приходим к однозначной аналитической функции на плоскости с разрезом $-\infty < z < 0$. Нас интересуют предельные значения этой функции на вещественной оси:

$$(x \pm i0)^\lambda = \lim_{y \to \pm 0} (x^2 + y^2)^{\frac{\lambda}{2}} e^{i\lambda \arg(x+iy)} = \begin{cases} e^{\pm i\lambda\pi}|x|^\lambda, & x < 0 \\ |x|^\lambda, & x > 0 \end{cases}.$$

С учетом формул (Д 1.6) мы можем также написать $(x \pm i0)^\lambda = x_+^\lambda + e^{\pm i\lambda\pi} x_-^\lambda$.

В правой части этих равенств стоят уже известные нам функционалы, определенные при всех комплексных λ, за исключением точек $-1, -2, \ldots$. Однако особенности функционалов x_+^λ и $e^{\pm i\lambda\pi} x_-^\lambda$ в этих точках сокращаются в силу формул (Д 1.4) и (Д 1.5)! Таким образом, $(x \pm i0)^\lambda$ – *целые* функции λ.

Пример Д 1.2. *Сосчитаем преобразование Фурье от x_+^λ. Прежде всего отметим, что $e^{-\varepsilon x} x_+^\lambda$ $\xrightarrow[\varepsilon \to 0]{S'} x_+^\lambda$, поэтому можно сначала вычислить преобразование Фурье от $e^{-\varepsilon x} x_+^\lambda$ и затем выполнить предельный переход. Имеем $F[e^{-\varepsilon x} x_+^\lambda] = \int\limits_0^\infty x^\lambda e^{i\xi x - \varepsilon x} dx = \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{\xi + i\varepsilon}\right)^{\lambda+1} \times$ $\times \int\limits_0^{\infty e^{i\arg(\xi+i\varepsilon) - i\frac{\pi}{2}}} z^\lambda e^{-z} dz$ (замена переменной $z = -ix(\xi + i\varepsilon)$). При $\varepsilon > 0$ контур интегрирования расположен в правой полуплоскости переменной z, в которой e^{-z} убывает. Поэтому контур интегрирования можно продеформировать в вещественную ось, получившийся интеграл дает $\Gamma(\lambda+1)$. Таким образом,*

$$F[x_+^\lambda] = e^{i\frac{\pi}{2}(\lambda+1)}\,\Gamma(\lambda+1) \lim_{\varepsilon \to 0} (\xi + i\varepsilon)^{-\lambda-1} = e^{i\frac{\pi}{2}(\lambda+1)}\,\Gamma(\lambda+1)\,(\xi + i0)^{-\lambda-1}\,.$$

II ФРАКТАЛЬНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ И ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ

Для понимания изложенного в данном дополнении необходимо знакомство с материалом дополнений I и III.

Под “фрактальными” операциями интегрирования и дифференцирования понимают обобщения соответствующих классических понятий, которые в каком-то смысле можно трактовать как интегрирования и дифференцирования дробных (и даже комплексных) порядков. С целью подойти к таким обобщениям, начнем с известной формулы Коши, выражающей решение дифференциального уравнения $y^{(n+1)}(x) = \phi(x)$ с нулевыми начальными данными в виде однократного интеграла

$$y(x) = \frac{1}{n!} \int\limits_0^x (x-t)^n \phi(t) dt = \frac{1}{n!} \int\limits_0^x t^n \phi(x-t) dt\,, \quad n \geqslant 1\,. \tag{Д 2.7}$$

Будем в дальнейшем считать, что $\phi(x) \equiv 0$ при отрицательных x, т.е. $\operatorname{supp}\phi \subseteq [0,\infty)$. Тогда правая часть этой формулы записывается в виде свертки $\mathcal{J}_n * \phi = \int_0^\infty \mathcal{J}_n(x-t)\phi(t)dt$, где обозначено $\mathcal{J}_n(t) := \frac{t^n}{n!}$. Наконец, этот же результат можно сформулировать как действие интегрального оператора (обозначаемого как I^{n+1}) с ядром $\mathcal{J}_n(x-t)$ на функцию ϕ:

$$I^{n+1} : \phi \mapsto y = \int\limits_0^\infty \mathcal{J}_n(x-t)\phi(t)dt\,.$$

Операторы I^n обладают следующим свойством, которое позволяет трактовать верхний значок как возведение в степень:

Утверждение Д 2.2. *Композиция $I^n \circ I^m$ действует также, как I^{n+m}, т.е. $I^n\left(I^m\phi\right) = I^m\left(I^n\phi\right) = I^{n+m}\phi$.*

$$\blacksquare\; I^n\left(I^m\phi\right) = \int\limits_0^\infty \mathcal{J}_{n-1}(x-s)ds\left(\int\limits_0^\infty \mathcal{J}_{m-1}(s-t)\phi(t)dt\right) = $$
$$= \int\limits_0^x \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!}ds\left(\int\limits_0^s \frac{(s-t)^{m-1}}{(m-1)!}\phi(t)dt\right) = $$
$$= \int\limits_0^x \phi(t)dt\left(\int\limits_t^x \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!}\frac{(s-t)^{m-1}}{(m-1)!}ds\right).$$

Интегрирование внутреннего интеграла $m-1$ раз по частям дает $\int\limits_t^x \frac{(x-s)^{n+m-2}}{(n+m-2)!}ds = \frac{(x-t)^{n+m-1}}{(n+m-1)!}$, что и доказывает утверждение. $\blacksquare$

Т.к. $n! = \Gamma(n+1)$, то действие оператора I^{n+1} на $\phi(t)$ (с учетом оговорок, сделанных относительно ϕ) можно понимать как значение функционала $\frac{(x-t)_+^n}{\Gamma(n+1)}$ на таких пробных функциях $\phi(t)$ (значения функционала само является функцией от x). Но было показано (см. замечание Д 1.2), что функционалы $\frac{x_+^\lambda}{\Gamma(\lambda+1)}$ являются целыми функциями λ (т.е. действие этих функционалов на любую пробную функцию есть целая функция от λ). Таким образом, формула $n+1$-кратного интегрирования (Д 2.7) распространяется на любые комплексные значения "n"!

Итак, мы пришли к следующему определению:

Определение Д 2.1. Интегралом (комплексного) порядка λ функции $\phi(t)$, $\operatorname{supp}\phi \subseteq [0,\infty)$, называется действие функционала $I^\lambda := \frac{(x-t)_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}$ на эту функцию; при $\operatorname{Re}\lambda > 0$ $\left(I^\lambda, \phi(t)\right) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int\limits_0^x (x-t)^{\lambda-1}\phi(t)dt$.

Из сравнения с формулой (Д 2.7) видно, что при натуральных λ это определение совпадает с обычным интегрированием. Отдельно рассмотрим "интегрирование" порядка $\lambda = 0$.

Утверждение Д 2.3. $\lim\limits_{\lambda\to 0}\left(\frac{(x-t)_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}, \phi(t)\right) = \phi(x)$

■ Используем формулу $\Gamma(\lambda)=\frac{\Gamma(\lambda+1)}{\lambda}\approx\frac{1}{\lambda}$ при $\lambda\to 0$. Поэтому $\left(\frac{(x-t)_+^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)},\phi\right)\approx\int\limits_0^x\lambda(x-t)^{\lambda-1}\phi(t)dt=\phi(x)x^\lambda+\int\limits_0^x\lambda(x-t)^{\lambda-1}\left[\phi(t)-\phi(x)\right]dt\underset{\lambda\to 0}{\to}\phi(x)\,.$ ■

Объединяя утверждения Д 2.2 и Д 2.3 можно сказать, что оператор $I^{-\lambda}$ является обратным к I^λ. Поэтому естественно следующее

Определение Д 2.2. Производной (комплексного) порядка λ функции $\phi(t)$, $\operatorname{supp}\phi\subseteq[0,\infty)$, называется действие функционала $D^\lambda:=I^{-\lambda}:=\frac{(x-t)_+^{-\lambda-1}}{\Gamma(-\lambda)}$ на эту функцию.

Очевидно, так определенное дифференцирование является линейной операцией, при натуральных λ совпадающей с обычным дифференцированием, а при $\lambda=0$ являющейся тождественным преобразованием. Отметим некоторые дополнительные свойства, которые проверяются, исходя из данных определений (мы не будем далее различать в обозначениях аргумент функции $\phi(x)$ и аргумент её фрактальной производной).

Утверждение Д 2.4. *1) Вычисление $\left(D^\lambda\phi\right)(x_0)$ является нелокальной операцией, т.е. зависит от значений $\phi(x)$ во всех точках, а не только от значений в точках, близких к x_0;*
2) Если $\phi(x)\equiv 0$ при $x<x_0$, то и $\left(D^\lambda\phi\right)(x)\equiv 0$ при $x<x_0$ (так называемый принцип причинности);
3) $\left(D^\lambda\phi(\gamma x)\right)=\gamma^\lambda\left(D^\lambda\phi(x)\right)(\gamma x)$;
4) $F[\left(D^\lambda\phi\right)(x)]=(-i\xi)^\lambda F[\phi(x)]$

Замечание Д 2.3. *Последнее свойство позволяет также в многомерном случае определить операции частного фрактального дифференцирования как: $D^\lambda_{x_j}\phi(\vec{x})=F^{-1}[(-i\xi_j)^\lambda\widetilde{\phi}(\vec{\xi})]$, где под F^{-1} понимается обратное многомерное преобразование Фурье.*

Пример Д 2.3. *Фрактальное затухание*
Рассмотрим “дифференциальное” уравнение $D^\lambda y+p^\lambda y=f(x)$ при вещественных $0<\lambda\leqslant 1$, p – постоянная. Если известно фундаментальное решение $\mathcal{E}(x)$, то $y=\mathcal{E}*f$, поэтому достаточно найти $\mathcal{E}(x)$.

Фундаментальное решение удовлетворяет уравнению $D^\lambda\mathcal{E}+p^\lambda\mathcal{E}=\delta(x)$, применив к обеим частям которого операцию I^λ, получим $\mathcal{E}+p^\lambda I^\lambda\mathcal{E}=\frac{1}{\Gamma(\lambda)}x_+^{\lambda-1}$.

Решения последнего уравнения можно искать в виде ряда $\mathcal{E}(x)=\sum\limits_{n=0}^\infty p^{n\lambda}\mathcal{E}_n(x)$, в котором $\mathcal{E}_n(x)$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\mathcal{E}_0(x)=\frac{1}{\Gamma(\lambda)}x_+^{\lambda-1}\,,\quad \mathcal{E}_n(x)=-I^\lambda\mathcal{E}_{n-1}(x)\,.$$

Последовательно применяя оператор $-I^\lambda$, находим $\mathcal{E}_n(x)=\frac{(-1)^n}{\Gamma(n\lambda+\lambda)}x_+^{n\lambda+\lambda-1}$. Таким образом,

$$\mathcal{E}(x)=\frac{1}{\Gamma(\lambda)}x_+^{\lambda-1}R\left((px)^\lambda,\lambda\right)\,,\quad R(\mu,\lambda)=\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n}{\Gamma(n\lambda+\lambda)}\mu^n\,. \qquad (\text{Д } 2.8)$$

Функция $R(\mu,\lambda)$ в (Д 2.8) называется функцией Миттаг-Лефлера. Нетрудно видеть, что при $\lambda=1$ $R(\mu,1)=\exp(-\mu)$, и $\mathcal{E}(x)$ совпадает с “классическим” фундаментальным решением. Поэтому функцию Миттаг-Лефлера можно назвать “Фрактальной экспонентой”. При $\lambda\neq 1$ функция $R(\mu,\lambda)$ не выражается через элементарные функции, однако *при некоторых частных значениях λ она выражается через другие специальные функции. В частности,*

$$R(\mu,1/2) = 1 - \sqrt{\pi}\mu e^{\mu^2}\,\mathrm{erfc}(\mu)\,,\ \textit{где}\ \mathrm{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_z^{\infty} e^{-t^2}dt\ -$$

функция ошибок (интеграл вероятностей).

С точки зрения физических приложений функции Миттаг-Лефлера важно отметить, что затухание, описываемое этой функцией, т.е. ее убывание при $\mu \to \infty$, в случае $\lambda < 1$ оказывается более медленным (степенным) по сравнению с экспоненциальным. В частности,

$$R(\mu,1/2) \underset{\mu\to\infty}{\sim} \frac{1}{2\mu^2} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{E}(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi}px^{3/2}}\,.$$

III Г-ФУНКЦИЯ

Исходное определение Г-функции может быть сделано различными способами. Наиболее распространенным является:

Определение Д 3.3. $\Gamma(z) := \int\limits_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}dt\,.$

Интеграл в Д 3.3 сходится, и при том абсолютно, в полуплоскости $\mathrm{Re}\,z > 0$. Проинтегрируем $\Gamma(z)$ по любому замкнутому контуру в правой полуплоскости. В силу абсолютной сходимости можно переставить интегралы по замкнутому контуру и $\int\limits_0^{\infty} dt$. После перестановки внутренний интеграл $\oint t^{z-1}dz = 0$ по теореме Коши. Следовательно, в силу теоремы Мореры,

Утверждение Д 3.5. *интеграл Д 3.3 определяет регулярную в правой полуплоскости функцию.*

Аналитическое продолжение

Материал настоящего пункта имеет очевидные аналогии с аналитическим продолжением функционалов $x_\pm^\lambda$ (см. дополнение I).

Интегрированием по частям в определении Д 3.3 получаем формулу, являющуюся одним из основных функциональных свойств $\Gamma(z)$:

Утверждение Д 3.6. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)\,, \ldots\,, \Gamma(z+n) = (z+n-1)...(z+1)z\Gamma(z)\,.$

Пример Д 3.4. $\Gamma(1) = \int\limits_0^{\infty} e^{-t}dt = 1$; $\Gamma(n+1) = n(n-1)...1 = n!$.

При помощи утверждения Д 3.6 можно продолжить $\Gamma(z)$ в полуплоскость $\mathrm{Re}\,z > -n$:

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z+n-1)...(z+1)z}\,, \quad \mathrm{Re}\,z > -n\,. \tag{Д 3.9}$$

Тем самым $\Gamma(z)$ мероморфна в полуплоскости $\mathrm{Re}\,z > -n$ и имеет там простые полюса в точках $z = -m$, $m = 0,1,...,n-1$. Нетрудно подсчитать $\operatorname*{res}\limits_{z=-m}\Gamma(z) = \frac{\Gamma(n-m)}{(n-m-1)...1(-1)...(-m)} = \frac{(-1)^m}{m!}$.

Формула $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \pi/\sin\pi z$

При выводе этой формулы достаточно считать $0 < \operatorname{Re} z < 1$. Тогда по единственности аналитического продолжения формула будет верна всюду.

■ Имеем $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-(t+\tau)}\left(\frac{t}{\tau}\right)^x \frac{dt d\tau}{t}$. Заменой переменных $\xi = t+\tau$, $\beta = \frac{\tau}{t}$ (якобиан этой замены равен $\frac{1+\beta}{t}$) приводим интеграл к виду $\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-\xi}\frac{\beta^{-x}}{1+\beta}d\xi d\beta = \int\limits_0^\infty \frac{\beta^{-x}}{1+\beta}d\beta$.

Чтобы вычислить последний интеграл, сделаем еще одну замену переменной:

$$\beta = e^{-y} \rightsquigarrow \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(1-x)y}}{1+e^y}dy = \frac{2\pi i}{1-e^{-2\pi i x}} \operatorname*{res}_{z=i\pi} \frac{e^{(1-x)z}}{1+e^z} = \frac{\pi}{\sin\pi x}\,. \blacksquare$$

Следствие Д 3.1. Γ-функция не имеет нулей. Действительно, правая часть формулы не имеет нулей, т.е. нули $\Gamma(z)$ в левой части формулы были бы возможны только в точках, в которых $\Gamma(1-z)$ имеет сингулярности. Но все сингулярности $\Gamma(1-z)$ известны: это точки $z = m+1$, в которых $\Gamma(z) = m! \neq 0$.

Бесконечное произведение для $\frac{1}{\Gamma(z)}$

Итак, $\Gamma(z)$ мероморфна и не имеет нулей. Поэтому $\frac{1}{\Gamma(z)}$ – целая функция, и может быть разложена в бесконечное произведение.

В силу известного предельного соотношения $\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} e^{-t}$ мы можем считать $\Gamma(z) = \lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}dt \underset{\text{по частям}}{=} \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{z}\int\limits_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1} t^z dt = \cdots =$
$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{z(z+1)\dots(z+n-1)}\frac{(n-1)!}{n^{n-1}}\int\limits_0^n t^{z+n-1}dt = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}$. Поэтому

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to\infty}\left[n^{-z}e^{z\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\right)}\right]\lim_{n\to\infty}\left[z\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}\right] = ze^{Cz}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{z}{k}\right)e^{-\frac{z}{k}}\,,$$

где $C = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$ существование предела вытекает из регулярности $\frac{1}{\Gamma(z)}$ и сходимости бесконечного произведения). Величина $C = 0.57721\ldots$ носит название постоянной Эйлера.

Функция $\psi(z)$

Переформулируем выведенные выше свойства Γ-функции* для ее логарифмической производной, известной под названием ψ-функции: $\psi(z) := \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \Rightarrow$
$\psi(z+1) = \frac{1}{z}+\psi(z)$
$\psi(1-z)-\psi(z) = \pi\operatorname{ctg}\pi z$
$\psi(z) = -\frac{1}{z}+\sum\limits_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{z+m}\right);\ \operatorname*{res}\limits_{z=-m}\psi(z) = -1$

*В действительности это – лишь малая часть известной о Γ-функции информации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] В.С.Владимиров. Уравнения математической физики, вып.1,2, “Наука”, 1971.

[2] В.С.Владимиров. Обобщенные функции в математической физике, “Наука”, 1976.

[3] И.М.Гельфанд, Г.Е.Шилов. Обобщенные функции и действия над ними, ГИФМЛ, вып.1 (1958), вып.2,3.

[4] Я.Микусинский, Р.Сикорский. Элементарная теория обобщенных функций, ИЛ, вып.1, 1959, вып.2, 1963.

[5] Л.Шварц, Математические методы для физических наук, “Мир”, 1965.